ОБ АЛЬТЕРНАНСАХ*

В. Ф. Демьянов В. Н. Малозёмов
vfd@ad9503.spb.edu malv@math.spbu.ru

20 декабря 2012 г.

В докладе анализируется альтернансная форма условий оптимальности для минимаксных задач с ограничениями-неравенствами.

1°. Рассмотрим экстремальную задачу: минимизировать функцию

$$\varphi(X) = \max_{t \in \mathcal{D}} f(X,\ t),$$

зависящую от $X \in \mathbb{R}^n$, при ограничениях

$$h_j(X) \leqslant 0, \quad j \in M.$$

Ограничения определяют множество планов Ω. Предполагается, что функции $h_j(X)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$, а функция $f(X,\ t)$ непрерывна вместе с $f'_X(X,\ t)$ на декартовом произведении $\Omega' \times \mathcal{D}$, где Ω' — некоторое открытое множество, содержащее Ω, и $\mathcal{D}$ — метрический компакт.

При $X \in \Omega$ положим

$$R(X) = \big\{t \in \mathcal{D} \mid f(X,\ t) = \varphi(X)\big\},$$
$$J(X) = \big\{j \in M \mid h_j(X) = 0\big\}.$$

Обозначим $N = 1 : n$. Напомним определение альтернанса [1, с. 351].

Говорят, что план $X^* \in \Omega$ обладает $(r+1)$-альтернансом $(r \in 0 : n)$, если найдутся точки максимума

$$t_0,\ t_1, \ldots,\ t_p \quad \text{из} \quad R(X^*)$$

и индексы активных ограничений

$$j_1, \ldots,\ j_q \quad \text{из} \quad J(X^*),$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q = r$, такие, что векторы $V_i[N]$, $i \in 0 : r$, вида

$$V_i[N] = f'_X(X^*,\ t_i), \quad i \in 0 : p,$$
$$V_{p+k}[N] = h'_{j_k}(X^*), \quad k \in 1 : q,$$

удовлетворяют следующим условиям:

1) они линейно зависимы;

2) существует подмножество $N' \subset N$, состоящее из r индексов, такое, что для всех $i \in 0 : r$ определители r-го порядка Δ_i, составленные из столбцов

$$V_0[N'], \dots,\ V_{i-1}[N'],\ V_{i+1}[N'], \dots,\ V_r[N'],$$

отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки, то есть

$$\operatorname{sign} \Delta_i = -\operatorname{sign} \Delta_{i-1}, \quad i \in 1 : r.$$

При $r = n$ альтернанс называется *полным.* Отметим, что в случае полного альтернанса условие 1) выполняется автоматически, а в условии 2) необходимо $N' = N$.

Справедливы следующие утверждения [1, § 7].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X^* — точка локального минимума функции $\varphi(X)$ на Ω и ограничения в ней регулярны. Тогда X^* обладает $(r+1)$-альтернансом при некотором $r \in 0 : n$.*

По поводу регулярности ограничений см. [1, § 3].

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что множество Ω выпукло и функция $\varphi(X)$ выпукла на Ω. В этом случае наличие $(r + 1)$-альтернанса у плана $X^* \in \Omega$ при некотором $r \in 0 : n$ достаточно для того, чтобы в X^* достигался минимум $\varphi(X)$ на Ω.*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть план $X^* \in \Omega$ обладает полным альтернансом. Тогда X^* — точка строгого локального минимума функции $\varphi(X)$ на Ω. Более того, существуют такие $r > 0$ и $\delta > 0$, что*

$$\varphi(X) \geqslant \varphi(X^*) + r\|X - X^*\| \quad \forall X \in \Omega \cap B_\delta(X^*), \tag{1}$$

где $B_\delta(X^*) = \big\{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X^*\| \leqslant \delta\big\}$.

Отметим, что в условиях теоремы 2 при наличии у плана X^* полного альтернанса существует $r > 0$, такое, что

$$\varphi(X) \geqslant \varphi(X^*) + r\|X - X^*\| \quad \forall X \in \Omega. \tag{2}$$

Действительно, зафиксируем $X \in \Omega$. Согласно (1) при малых $\lambda > 0$ будет

$$\varphi\big(X^* + \lambda(X - X^*)\big) \geqslant \varphi(X^*) + r\lambda\|X - X^*\|. \tag{3}$$

Вместе с тем, в силу выпуклости функции φ на Ω

$$\varphi\big(X^* + \lambda(X - X^*)\big) \leqslant \varphi(X^*) + \lambda\big[\varphi(X) - \varphi(X^*)\big]. \tag{4}$$

Объединив (3) и (4), придём к неравенству (2).

2°. Приведём простые примеры различных видов альтернанса.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = (x_1,\ x_2)$ и

$$f(X,\ t) = t^2 + 1 - (x_1 + x_2 t).$$

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$\varphi(X) = \max_{t \in [-1,\ 1]} f(X,\ t)$$

при одном ограничении

$$h(X) := x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0.$$

Возьмём план $X^* = (1,\ 0)$ и покажем, что он обладает полным альтернансом. Имеем $f(X^*,\ t) = t^2$. Множество $R(X^*)$ состоит из двух точек $t_0 = -1$ и $t_1 = 1$. Ограничение в точке X^* активно.

Найдём производные

$$f'_X(X,\ t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -t \end{pmatrix}, \quad h'_X(X) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

и составим матрицу

$$V = \big(f'_X(X^*,\ t_0),\ f'_X(X^*,\ t_1),\ h'_X(X^*)\big) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы линейно зависимы. Вычислим определители Δ_i подматриц, получающихся из матрицы V исключением i-го столбца, $i \in 0 : 2$:

$$\Delta_0 = 2, \quad \Delta_1 = -2, \quad \Delta_2 = 2.$$

Определители отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки. Значит, план X^* обладает 3-альтернансом, который при $n = 2$ является полным.

В данном примере множество планов Ω выпукло и функция $\varphi(X)$ выпукла на Ω. План $X^* = (1,\ 0)$ обладает полным альтернансом, что гарантирует выполнение неравенства (2) при некотором $r > 0$. В частности, X^* — единственная точка минимума функции $\varphi(X)$ на Ω.

ПРИМЕР 2. Пусть $X = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ и

$$f(X,\ t) = t^4 + 1 - (x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3).$$

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$\varphi(X) = \max_{t \in [-1,\ 1]} f(X,\ t)$$

при ограничении

$$h(X) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 \leqslant 0.$$

Покажем, что точка $X^* = (\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0)$ обладает 3-альтернансом.

Имеем

$$f(X^*,\ t) = t^4 + 1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + t^2).$$

Множество $R(X^*)$ состоит из двух точек $t_0 = -1$ и $t_1 = 1$ (см. рис.). Ограничение в точке X^* активно.

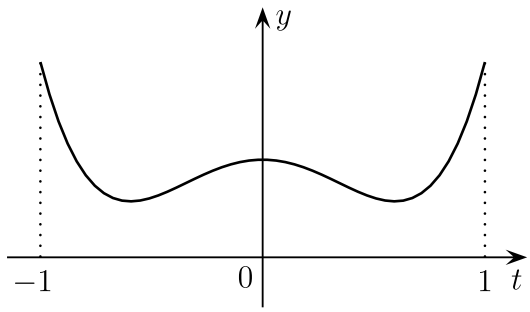

Рис. График функции $y = f(X^*, t)$

Составим матрицу

$$V = \big(f'_X(X^*,\ t_0),\ f'_X(X^*,\ t_1),\ h'_X(X^*)\big) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы линейно зависимы. В качестве N' возьмём множество индексов первых двух строк ($r = 2$). Получим матрицу

$$V[N',\ R] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $R = 0:2$. Определители Δ_i подматриц $V\big[N',\ R\backslash\{i\}\big]$ при $i \in 0:2$ отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки ($\Delta_0 = \sqrt{2}$, $\Delta_1 = -\sqrt{2}$, $\Delta_2 = 2$). Значит, план X^* обладает 3-альтернансом, который при $n = 4$ является неполным.

И в данном случае множество планов Ω выпукло и функция $\varphi(X)$ выпукла на Ω. По теореме 2 в точке $X^* = (\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0)$ достигается минимум $\varphi(X)$ на Ω.

Покажем, что несмотря на неполный альтернанс точка минимума единственна. Пусть X — какая-либо точка минимума. Тогда при всех $t \in [-1, 1]$

$$f(X, t) \leqslant \max_{t\in[-1,\,1]} f(X^*, t) = 2 - \sqrt{2}.$$

В частности, $f(X,\ -1) \leqslant 2 - \sqrt{2}$, $f(X,\ 1) \leqslant 2 - \sqrt{2}$. Получаем, что X удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geqslant \sqrt{2}, \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant \sqrt{2}, \\ &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqslant 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Как следствие,

$$x_1 + x_3 \geqslant \sqrt{2}, \tag{6}$$

$$x_1^2 + x_3^2 \leqslant 1, \tag{7}$$

В силу (7) имеем

$$\frac{x_1 + x_3}{2} \leqslant \left(\frac{x_1^2 + x_3^2}{2}\right)^{1/2} \leqslant \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tag{8}$$

так что $x_1 + x_3 \leqslant \sqrt{2}$. Учитывая (6), приходим к равенству $x_1 + x_3 = \sqrt{2}$.

Теперь обратим внимание на то, что неравенства (8) выполняются как равенства. Отсюда следует, что $x_1 = x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. На основании (5) заключаем, что $x_2 = x_4 = 0$.

Установлено, что минимум функции $\varphi(X)$ на Ω достигается в единственной точке $X^* = \big(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\big)$.

3°. По определению план X^* обладает 1-альтернансом, если существует точка $t_0 \in R(X^*)$, в которой $f'_X(X^*,\ t_0) = \mathbb{O}$.

ПРИМЕР 3. Пусть $X = (x_1,\ x_2)$ и

$$f(X,\ t) = 1 - (x_1 t + x_2 t^2).$$

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$\varphi(X) = \max_{t\in[0,\ 1]} f(X,\ t)$$

при ограничении

$$h(X) := x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0.$$

Возьмём план $X^* = (0,\ \frac{1}{2})$, в котором ограничение неактивно. Имеем $f(X^*,\ t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$. Множество $R(X^*)$ сосотоит из единственной точки $t_0 = 0$. При этом

$$f'_X(X^*,\ t_0) = \begin{pmatrix} -t_0 \\ -t_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По определению план X^* обладает 1-альтернансом. Согласно теореме 2 в X^* достигается минимум функции $\varphi(X)$ на Ω.

Найдём все множество точек минимума. Очевидно, что

$$\varphi(X) \geqslant f(X,\ 0) = 1 \quad \forall X \in \Omega,$$
$$\varphi(X^*) = \max_{t\in[0,\ 1]} (1 - \tfrac{1}{2}t^2) = 1.$$

Всё множество точек минимума функции $\varphi(X)$ на Ω определяется соотношениями

$$f(X,\ t) := 1 - (x_1 t + x_2 t^2) \leqslant 1, \quad t \in (0,\ 1];$$
$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1.$$

Нетрудно понять, что они эквивалентны трём неравенствам

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \geqslant 0, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Даугавет В. А., Малозёмов В. Н. Нелинейные задачи аппроксимации / В кн.: Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. С. 336-363.