ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ*

М. И. Григорьев

m_grigoriev@list.ru

29 марта 2008 г.

В статье [1] изучались полиномы в форме Бернштейна и их приложение к теории кривых Безье. В данном докладе рассмотрено естественное обобщение таких полиномов на двумерный случай.

1°. Напомним, что базисными полиномами Бернштейна от одной переменной называются полиномы

$$b_k^n(x) = C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}, \quad k \in 0:n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Базисные полиномы Бернштейна от двух переменных определяются следующим образом:

$$b_{ks}^n(x,y) = C_n^{k,s}\, x^k\, y^s\, (1-x-y)^{n-k-s},$$
$$k \in 0:n, \quad s \in 0:n-k, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $C_n^{k,s} = \frac{n!}{k!\, s!\, (n-k-s)!}$ — так называемые *триномиальные* коэффициенты. В частности,

$$b_{00}^0(x,y) \equiv 1, \quad b_{n0}^n(x,y) = x^n, \quad b_{0n}^n(x,y) = y^n, \quad b_{00}^n(x,y) = (1-x-y)^n;$$

$$b_{k0}^n(x,0) = b_k^n(x), \quad k \in 0:n; \qquad b_{ks}^n(x,0) = 0, \quad s \in 1:n, \quad k \in 0:n-s;$$

$$b_{0s}^n(0,y) = b_s^n(y), \quad s \in 0:n; \qquad b_{ks}^n(0,y) = 0, \quad k \in 1:n, \quad s \in 0:n-k.$$

При $x + y = 1$

$$b_{ks}^n(x,y) = 0, \quad k+s \leqslant n-1; \qquad b_{ks}^n(x,y) = b_k^n(x) = b_s^n(y), \quad k+s = n.$$

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Отметим также, что

$$b^n_{ks}(x,y) > 0 \ \text{ при } \ x>0,\ y>0,\ x+y<1.$$

Справедливо тождество

$$\bigl[xp + yq + (1-x-y)\bigr]^n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k} b^n_{ks}(x,y)\, p^k\, q^s. \tag{1}$$

Оно следует из общей формулы

$$(x+y+z)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k (y+z)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k} C_n^k\, C_{n-k}^s\, x^k\, y^s\, z^{n-k-s} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k} C_n^{k,s}\, x^k\, y^s\, z^{n-k-s}. \tag{2}$$

(Здесь мы воспользовались тем фактом, что $C_n^k\, C_{n-k}^s = C_n^{k,s}$.)

Подставив в (1) $p=q=1$, получим

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k} b^n_{ks}(x,y) \equiv 1.$$

2°. Рассмотрим полином от двух переменных в форме Бернштейна

$$B(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}\, b^n_{ks}(x,y).$$

Введём конечные разности на треугольном массиве коэффициентов

$$\left(\Delta^j a\right)_{*,s} = \sum_{\beta=0}^{j} (-1)^{j-\beta}\, C_j^\beta\, a_{*,s+\beta}\,,$$

$$\left(\Delta^{i,j} a\right)_{ks} = \left(\Delta^i \left(\Delta^j a\right)_{*,s}\right)_k = \sum_{\alpha=0}^{i} (-1)^{i-\alpha}\, C_i^\alpha \left(\sum_{\beta=0}^{j} (-1)^{j-\beta}\, C_j^\beta\, a_{k+\alpha,s+\beta}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{i}\sum_{\beta=0}^{j} (-1)^{i+j-\alpha-\beta}\, C_i^\alpha\, C_j^\beta\, a_{k+\alpha,s+\beta}\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Полином $B(x,y)$ допускает представление*

$$B(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} C_n^{i,j} \left(\Delta^{i,j} a\right)_{00}\, x^i\, y^j. \tag{3}$$

Доказательство. Имеем

$$B(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}a_{ks}\,C_n^{k,s}\,x^k\,y^s\,(1-x-y)^{n-k-s}.$$

Применив формулу (2) к $(1-x-y)^{n-k-s}$, получим

$$B(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}a_{ks}\,C_n^{k,s}\sum_{\alpha=0}^{n-k-s}\sum_{\beta=0}^{n-k-s-\alpha}C_{n-k-s}^{\alpha,\beta}\,(-1)^{\alpha}\,(-1)^{\beta}\,x^{k+\alpha}\,y^{s+\beta}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}\sum_{i=k}^{n-s}\sum_{j=s}^{n-i}a_{ks}\,C_n^{k,s}\,C_{n-k-s}^{i-k,j-s}\,(-1)^{i+j-k-s}\,x^i\,y^j.$$

Поменяем порядок суммирования по k и по i (через s). Поскольку

$$\sum_{s=0}^{n-k}\sum_{i=k}^{n-s}=\sum_{i=k}^{n}\sum_{s=0}^{n-i}\qquad\text{и}\qquad\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i},$$

то

$$B(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{n-i}\sum_{j=s}^{n-i}a_{ks}\,C_n^{k,s}\,C_{n-k-s}^{i-k,j-s}\,(-1)^{i+j-k-s}\,x^i\,y^j.$$

Теперь поменяем порядок суммирования по k и по j (через s). Поскольку

$$\sum_{s=0}^{n-i}\sum_{j=s}^{n-i}=\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{s=0}^{j}\qquad\text{и}\qquad\sum_{k=0}^{i}\sum_{j=0}^{n-i}=\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{i},$$

то

$$B(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{j}a_{ks}\,C_n^{k,s}\,C_{n-k-s}^{i-k,j-s}\,(-1)^{i+j-k-s}\,x^i\,y^j.$$

Воспользуемся равенством

$$C_n^{k,s}\,C_{n-k-s}^{i-k,j-s}=C_n^{i,j}\,C_i^k\,C_j^s\,.$$

Придём к требуемому представлению

$$B(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}C_n^{i,j}\,x^i\,y^j\left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{j}(-1)^{i+j-k-s}\,C_i^k\,C_j^s\,a_{ks}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}C_n^{i,j}\,\left(\Delta^{i,j}a\right)_{00}\,x^i\,y^j.$$

Предложение доказано. □

3°. Зафиксируем два целых неотрицательных числа α, β и положим $r = \alpha + \beta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для частной производной* $\dfrac{\partial^r B(x,y)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}$ *полинома в форме Бернштейна при* $r \in 1:n$ *справедлива формула*

$$\frac{\partial^r B(x,y)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta} = A_n^r \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^{n-r-k} \left(\Delta^{\alpha,\beta} a\right)_{ks}\, b_{ks}^{n-r}(x,y), \tag{4}$$

где $A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$.

Доказательство. Продифференцируем тождество (3) по x. Учитывая, что $i\,C_n^{i,j} = n\,C_{n-1}^{i-1,j}$, получаем

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} (i\,C_n^{i,j})\left(\Delta^{i,j} a\right)_{00} x^{i-1}\, y^j = n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} C_{n-1}^{i,j} \left(\Delta^{i+1,j} a\right)_{00} x^i\, y^j.$$

Но $(\Delta^{i+1,j} a)_{00} = (\Delta^{i,j}(\Delta^{1,0} a))_{00}$, так что

$$\begin{aligned}\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} &= n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-i} C_{n-1}^{i,j} \left(\Delta^{i,j}(\Delta^{1,0} a)\right)_{00} x^i\, y^j = \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1-k} \left(\Delta^{1,0} a\right)_{ks}\, b_{ks}^{n-1}(x,y).\end{aligned}$$

Это соответствует формуле (4) при $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Далее

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1-j} C_{n-1}^{i,j} \left(\Delta^{i,j}(\Delta^{1,0} a)\right)_{00} x^i\, y^j.$$

Продифференцируем данное тождество по y. Учитывая, что $\Delta^{0,1}(\Delta^{1,0} a) = \Delta^{1,1} a$, аналогично предыдущему получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x\,\partial y} &= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=0}^{n-2-j} C_{n-2}^{i,j} \left(\Delta^{i,j}(\Delta^{1,1} a)\right)_{00} x^i\, y^j = \\ &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=0}^{n-2-k} \left(\Delta^{1,1} a\right)_{ks}\, b_{ks}^{n-2}(x,y).\end{aligned}$$

Продолжив дифференцирование, придём к (4). $\square$

4°. Рассмотрим $n+1$ треугольных массивов базисных полиномов Бернштейна
$$\bigl\{b^i_{ks}(x,y)\bigr\},\quad k\in 0:i,\quad s\in 0:i-k,\quad i\in 0,1,\ldots,n.$$
Положим для удобства
$$\begin{aligned} &b^i_{k,-1}(x,y)\equiv b^i_{-1,s}(x,y)\equiv 0,\quad k,s\in 0:i+1;\\ &b^i_{ks}(x,y)\equiv 0,\quad k,s\geqslant 0,\quad k+s=i+1,\quad i=0,1,\ldots,n-1.\end{aligned}\tag{5}$$
Например, при $i=3$ получим 15 искусственно добавленных полиномов (см. рис. 1).

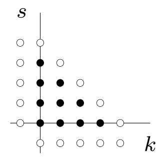

Рис. 1

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При любых вещественных x, y справедливы рекуррентные соотношения*
$$\begin{aligned} &b^0_{00}\equiv 1;\\ &b^i_{ks}=(1-x-y)\,b^{i-1}_{ks}+x\,b^{i-1}_{k-1,s}+y\,b^{i-1}_{k,s-1},\\ &k\in 0:i,\quad s\in 0:i-k,\quad i=1,\ldots,n.\end{aligned}\tag{6}$$

Доказательство. Перепишем тождества (5), заменив в них i на $i-1$:
$$\begin{aligned} &b^{i-1}_{k,-1}\equiv b^{i-1}_{-1,s}\equiv 0,\quad k,s\in 0:i;\\ &b^{i-1}_{ks}\equiv 0,\quad k,s\geqslant 0,\quad k+s=i,\quad i=1,\ldots,n.\end{aligned}\tag{7}$$
Зафиксируем $i\in 1:n$. При $k=s=0$ обе части (6) равны $(1-x-y)^i$. Пусть $k=0$, $s\in 1:i-1$. Тогда
$$(1-x-y)\,b^{i-1}_{0s}+x\,b^{i-1}_{-1,s}+y\,b^{i-1}_{0,s-1}=$$
$$=(1-x-y)\,C^s_{i-1}\,y^s\,(1-x-y)^{i-1-s}+y\,C^{s-1}_{i-1}\,y^{s-1}\,(1-x-y)^{i-s}=$$
$$=(1-x-y)^{i-s}\,y^s\,(C^s_{i-1}+C^{s-1}_{i-1})=C^s_i\,y^s\,(1-x-y)^{i-s}=b^i_{0s}.$$
При $k=0$, $s=i$ обе части (6) равны y^i.

Аналогично проверяется случай $s=0$, $k\in 1:i$.

Если $k,s\geqslant 1$, $k+s=i$, то, согласно (7), $b^{i-1}_{ks}\equiv 0$, так что
$$(1-x-y)\,b^{i-1}_{ks}+x\,b^{i-1}_{k-1,s}+y\,b^{i-1}_{k,s-1}=$$
$$=x\,C^{k-1,s}_{i-1}\,x^{k-1}\,y^s+y\,C^{k,s-1}_{i-1}\,x^k\,y^{s-1}=$$
$$=x^k\,y^s(C^{k-1,s}_{i-1}+C^{k,s-1}_{i-1})=C^{k,s}_i\,x^k\,y^s=b^i_{ks}.$$

Осталось рассмотреть случай $k, s \geqslant 1$, $k + s \in 2 : i - 1$. Имеем

$$(1-x-y)\, b_{ks}^{i-1} + x\, b_{k-1,s}^{i-1} + y\, b_{k,s-1}^{i-1} = (1-x-y)\, C_{i-1}^{k,s}\, x^k\, y^s\, (1-x-y)^{i-1-k-s} +$$
$$+ x\, C_{i-1}^{k-1,s}\, x^{k-1}\, y^s\, (1-x-y)^{i-k-s} + y\, C_{i-1}^{k,s-1}\, x^k\, y^{s-1}\, (1-x-y)^{i-k-s} =$$
$$= x^k\, y^s\, (1-x-y)^{i-k-s} \big(C_{i-1}^{k,s} + C_{i-1}^{k-1,s} + C_{i-1}^{k,s-1} \big) =$$
$$= C_i^{k,s}\, x^k\, y^s\, (1-x-y)^{i-k-s} = b_{ks}^i.$$

Мы воспользовались легко проверяемой формулой

$$C_{i-1}^{k,s} + C_{i-1}^{k-1,s} + C_{i-1}^{k,s-1} = C_i^{k,s}.$$

Предложение доказано. $\square$

5°. Зафиксируем произвольные вещественные x, y. Для вычисления значения $B(x,y)$ введём $n+1$ треугольных массивов $\{a_{ks}^i\}$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} &a_{ks}^0 = a_{ks}, \quad k \in 0 : n, \quad s \in 0 : n-k; \\ &a_{ks}^i = (1-x-y)\, a_{ks}^{i-1} + x\, a_{k+1,s}^{i-1} + y\, a_{k,s+1}^{i-1}, \\ &k \in 0 : n-i, \quad s \in 0 : n-i-k, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{8}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Справедливо равенство* $B(x,y) = a_{00}^n$.

Доказательство. При $n = 0$ утверждение тривиально. При $n = 1$ оно проверяется так:

$$B(x,y) = a_{00}\, b_{00}^1(x,y) + a_{01}\, b_{01}^1(x,y) + a_{10}\, b_{10}^1(x,y) =$$
$$= a_{00}\, (1-x-y) + a_{01}\, y + a_{10}\, x = a_{00}^1.$$

Пусть $n \geqslant 2$. Согласно (6), (7) и (8) имеем

$$B(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks} \big[(1-x-y)\, b_{ks}^{n-1} + x\, b_{k-1,s}^{n-1} + y\, b_{k,s-1}^{n-1} \big] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-k-1} a_{ks}^0\, (1-x-y)\, b_{ks}^{n-1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}^0\, x\, b_{k-1,s}^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-k} a_{ks}^0\, y\, b_{k,s-1}^{n-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-k-1} \big[(1-x-y)\, a_{ks}^0 + x\, a_{k+1,s}^0 + y\, a_{k,s+1}^0 \big] b_{ks}^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1-k} a_{ks}^1\, b_{ks}^{n-1}.$$

Продолжив аналогично, получим

$$B(x,y)=\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{n-2-k} a_{ks}^2\, b_{ks}^{n-2}(x,y)=\cdots=\sum_{k=0}^{1}\sum_{s=0}^{1-k} a_{ks}^{n-1}\, b_{ks}^1(x,y)=$$
$$=a_{00}^{n-1}\,(1-x-y)+a_{01}^{n-1}\,y+a_{10}^{n-1}\,x=a_{00}^n\,.$$

Предложение доказано. □

6°. Обратимся к вопросу о вычислении производных полинома $B(x,y)$. Нам потребуется соотношение

$$(1-x-y)\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^i\right)_{ks}+x\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^i\right)_{k+1,s}+$$
$$+\,y\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^i\right)_{k,s+1}=\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^{i+1}\right)_{ks}\,, \qquad (9)$$

которое непосредственно следует из (8). Действительно,

$$\sum_{p=0}^{\alpha}\sum_{q=0}^{\beta}(-1)^{\alpha+\beta-p-q}\,C_\alpha^p\,C_\beta^q\left[(1-x-y)\,a_{k+p,s+q}^i+x\,a_{k+1+p,s+q}^i+\right.$$
$$\left.+\,y\,a_{k+p,s+1+q}^i\right]=\sum_{p=0}^{\alpha}\sum_{q=0}^{\beta}(-1)^{\alpha+\beta-p-q}\,C_\alpha^p\,C_\beta^q\,a_{k+p,s+q}^{i+1}=\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^{i+1}\right)_{ks}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *При фиксированных x, y частные производные от полинома в форме Бернштейна можно вычислить по формуле*

$$\frac{\partial^r B(x,y)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}=A_n^r\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^{n-r}\right)_{00}.$$

Здесь $\alpha+\beta=r$, $r\in 1:n$.

Доказательство. Согласно (4)

$$\frac{\partial^r B(x,y)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}=A_n^r\sum_{k=0}^{n-r}\sum_{s=0}^{n-r-k}\left(\Delta^{\alpha,\beta}a\right)_{ks}\,b_{ks}^{n-r}(x,y).$$

Воспользуемся приёмом из доказательства предложения 4 и соотношением (9). Запишем

$$\sum_{k=0}^{n-r}\sum_{s=0}^{n-r-k}\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^0\right)_{ks}\,b_{ks}^{n-r}(x,y)=\sum_{k=0}^{n-r-1}\sum_{s=0}^{n-r-1-k}\Big[(1-x-y)\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^0\right)_{ks}+$$
$$+\,x\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^0\right)_{k+1,s}+y\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^0\right)_{k,s+1}\Big]b_{ks}^{n-r-1}(x,y)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-r-1}\sum_{s=0}^{n-r-1-k}\left(\Delta^{\alpha,\beta}a^1\right)_{ks}b_{ks}^{n-r-1}(x,y).$$

Продолжив данное преобразование, получим

$$\frac{\partial^r B(x,y)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta} = A_n^r \sum_{k=0}^{1} \sum_{s=0}^{1-k} \left(\Delta^{\alpha,\beta} a^{n-r-1}\right)_{ks} b_{ks}^1(x,y) = A_n^r \left(\Delta^{\alpha,\beta} a^{n-r}\right)_{00}.$$

Предложение доказано. □

Таким образом, $n+1$ треугольных массивов $\{a_{ks}^i\}$, построенных по формуле (8), дают возможность вычислить как значение полинома $B(x,y)$, так и значения всех его частных производных в фиксированной точке (x,y).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С. 1962-1971.