

ПОВЕРХНОСТИ БЕЗЬЕ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ. ПЕРЕПАРАМЕТРИЗАЦИЯ*

И. А. Капелюхин В. Н. Малозёмов А. Н. Сергеев
i_kapelyuhin@mail.ru malv@math.spbu.ru aser57@mail.ru

10 марта 2007 г.

1°. Пусть в пространстве \mathbb{R}^3 задан треугольный массив полюсов

$$\begin{array}{cccccccc}
 P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0,n-2} & P_{0,n-1} & P_{0n} \\
 & P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1,n-2} & P_{1,n-1} & \\
 & & P_{20} & \dots & P_{2,n-2} & & \\
 & & & \ddots & & & \ddots \\
 & & & & P_{n-1,0} & P_{n-1,1} & \\
 & & & & & P_{n0} &
 \end{array}$$

По этим полюсам с помощью полинома Бернштейна на треугольнике можно построить поверхность Безье [1]:

$$B_0(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} \frac{n!}{i! j! (n-i-j)!} x^i y^j (1-x-y)^{n-i-j}, \quad (1)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1.$$

Покажем, что поверхность (1) допускает три других представления, в которых вектор параметров изменяется не в треугольнике, а в единичном квадрате.

2°. Введём обозначения

$$\Delta = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\},$$

$$Q = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}.$$

* Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: <http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/>

Наряду с (1) рассмотрим полином

$$B_1(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} b_i^n(u) b_j^{n-i}(v), \quad (u, v) \in Q,$$

где $b_k^m(x) = C_m^k x^k (1-x)^{m-k}$ — базисные полиномы Бернштейна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо равенство множеств*

$$\{B_0(x, y) \mid (x, y) \in \Delta\} = \{B_1(u, v) \mid (u, v) \in Q\}. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование

$$x = u, \quad y = (1-u)v. \quad (3)$$

Поскольку при $(u, v) \in Q$

$$x + y = 1 - (1-u) + (1-u)v = 1 - (1-u)(1-v) \leq 1,$$

то преобразование (3) сопоставляет точке $(u, v) \in Q$ точку $(x, y) \in \Delta$. Наоборот, если $(x, y) \in \Delta$, то найдётся точка $(u, v) \in Q$, для которой выполняются соотношения (3). Действительно, при $x = 1$ имеем $y = 0$. Условием (3) будет удовлетворять пара $(u, v) \in Q$ с $u = 1$ и любым $v \in [0, 1]$. При $x < 1$, требуемой будет пара $u = x, v = y/(1-x)$ с $v \leq 1$.

После этого замечания обратимся к равенству (2) и обозначим множества, стоящие в левой и правой его частях, через \mathfrak{B}_0 и \mathfrak{B}_1 соответственно. Возьмём точку $P \in \mathfrak{B}_1$. По определению найдётся вектор параметров $(u, v) \in Q$, такой, что

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} C_n^i u^i (1-u)^{n-i} C_{n-i}^j v^j (1-v)^{n-i-j} = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} C_n^i C_{n-i}^j u^i ((1-u)v)^j ((1-u)(1-v))^{n-i-j}. \end{aligned} \quad (4)$$

Перейдём к вектору параметров $(x, y) \in \Delta$ по формуле (3). Учтывая, что $(1-u)(1-v) = 1-x-y$ и

$$C_n^i C_{n-i}^j = \frac{n!}{i! j! (n-i-j)!},$$

получаем

$$P = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} \frac{n!}{i! j! (n-i-j)!} x^i y^j (1-x-y)^{n-i-j}.$$

Значит $P \in \mathfrak{B}_0$. Установлено включение $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_0$.

Обратное включение проверяется обратным ходом с использованием того факта, что вектору параметров $(x, y) \in \Delta$ можно сопоставить вектор параметров $(u, v) \in Q$, удовлетворяющий соотношениям (3).

Предложение доказано. \square

Преобразование (3) квадрата Q в треугольник Δ является вырожденным, тем не менее, с его помощью мы достигли цели. Этому способствовало следующее свойство полиномов Бернштейна: при всех $v \in [0, 1]$

$$B_1(1, v) = P_{n0} b_0^n(v) \equiv P_{n0} = B_0(1, 0).$$

3°. Рассмотрим другую форму полинома Бернштейна

$$B_2(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ji} b_i^n(s) b_j^{n-i}(t), \quad (s, t) \in Q.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо равенство множеств*

$$\{B_1(u, v) \mid (u, v) \in Q\} = \{B_2(s, t) \mid (s, t) \in Q\}. \quad (5)$$

Доказательство. Запишем соотношения

$$\begin{aligned} s &= (1 - u)v, \\ (1 - s)t &= u. \end{aligned} \quad (6)$$

Покажем, что каждой паре $(u, v) \in Q$ можно сопоставить пару $(s, t) \in Q$, такую, что выполняются соотношения (6), и наоборот.

Пусть $(u, v) \in Q$. Если $u > 0$, то соответствующее s меньше единицы, и мы однозначно определяем t :

$$t = \frac{u}{1 - s} = \frac{u}{u + (1 - u)(1 - v)} \leq 1.$$

Если $u = 0$, то $s = v$, и можно взять $t = 0$.

Симметричным образом по $(s, t) \in Q$ определяется требуемая пара $(u, v) \in Q$.

Обратимся к равенству (5) и перепишем его в виде $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$. Возьмём точку $P \in \mathfrak{B}_1$ и представим её в виде (4). После этого перейдём к вектору параметров $(s, t) \in Q$ по формулам (6). Учтывая, что

$$(1 - u)(1 - v) = 1 - u - s = 1 - s - (1 - s)t = (1 - s)(1 - t)$$

и $C_n^i C_{n-i}^j = C_n^j C_{n-j}^i$, получаем

$$P = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} C_n^j C_{n-j}^i ((1 - s)t)^i s^j ((1 - s)(1 - t))^{n-j-i} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} b_j^n(s) b_i^{n-j}(t) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} P_{ij} b_j^n(s) b_i^{n-j}(t) = \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ji} b_i^n(s) b_j^{n-i}(t).
\end{aligned}$$

Значит, $P \in \mathfrak{B}_2$. Установлено включение $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$.

Обратное включение проверяется обратным ходом. Используется тот факт, что вектору параметров $(s, t) \in Q$ можно сопоставить вектор параметров $(u, v) \in Q$, удовлетворяющий соотношениям (6).

Предложение доказано. \square

4°. В формуле для $B_1(u, v)$ индекс i есть индекс горизонтальной строки треугольного массива полюсов $\{P_{ij}\}$. В формуле для $B_2(s, t)$ тот же индекс является индексом наклонной слева направо строки. Остаётся ещё одна возможность — формировать поверхность Безье на основе наклонных справа налево строк массива $\{P_{ij}\}$.

В этой связи рассмотрим новую форму полинома Бернштейна

$$B_3(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{j, n-i-j} b_i^n(s) b_j^{n-i}(t), \quad (s, t) \in Q.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо равенство множеств*

$$\{B_1(u, v) \mid (u, v) \in Q\} = \{B_3(s, t) \mid (s, t) \in Q\}. \quad (7)$$

Доказательство. Запишем соотношения

$$\begin{aligned}
s &= (1-u)(1-v), \\
(1-s)t &= u.
\end{aligned} \quad (8)$$

Если обозначить $v' = 1 - v$, то формулы (8) и (6) становятся идентичными. Это позволяет утверждать, что каждой паре $(u, v) \in Q$ можно сопоставить пару $(s, t) \in Q$, такую, что выполняются соотношения (8), и наоборот.

Обратимся к равенству (7) и перепишем его в виде $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_3$. Возьмём точку $P \in \mathfrak{B}_1$ и представим её в виде (4). После этого перейдём к вектору параметров $(s, t) \in Q$ по формулам (8). Учитывая, что

$$(1-u)v = 1-u-s = 1-s-(1-s)t = (1-s)(1-t)$$

и $C_n^i C_{n-i}^j = C_{i+j}^i C_n^{i+j}$, получаем

$$P = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} C_{i+j}^i C_n^{i+j} ((1-s)t)^i ((1-s)(1-t))^j s^{n-i-j} =$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} C_n^{i+j} s^{n-i-j} (1-s)^{i+j} C_{i+j}^i t^i (1-t)^j.$$

После замены индекса j на $k = n - i - j$ придём к формуле

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} P_{i,n-i-k} C_n^k s^k (1-s)^{n-k} C_{n-k}^i t^i (1-t)^{n-i-k} = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} P_{i,n-i-k} b_k^n(s) b_i^{n-k}(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k} P_{i,n-k-i} b_k^n(s) b_i^{n-k}(t) = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{j,n-i-j} b_i^n(s) b_j^{n-i}(t). \end{aligned}$$

Значит, $P \in \mathfrak{B}_3$. Установлено включение $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_3$.

Обратное включение проверяется обратным ходом с использованием того факта, что вектору параметров $(s, t) \in Q$ можно сопоставить вектор параметров $(u, v) \in Q$, удовлетворяющий соотношениям (8).

Предложение доказано. \square

5°. На приводимых ниже рисунках 1–4 изображены поверхности Безье, построенные по одной и той же системе полюсов (в \mathbb{R}^3 при $n = 3$)

$$\begin{array}{cccc} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ & P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ & & P_{20} & P_{21} \\ & & & P_{30}, \end{array}$$

но с использованием разных представлений полинома Бернштейна. Рис. 1 соответствует представлению $B_0(x, y)$, рис. 2 — представлению $B_1(u, v)$, рис. 3 — представлению $B_2(s, t)$, рис. 4 — представлению $B_3(s, t)$. Вычисление значений полиномов проводилось с постоянным шагом по каждому параметру в областях Δ (рис. 1) и Q (рис. 2–4). По доказанному все четыре полинома Бернштейна определяют одну и ту же поверхность Безье. Вопрос о быстром вычислении вырожденных полиномов Бернштейна $B_1(u, v)$, $B_2(s, t)$, $B_3(s, t)$ рассматривался в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Farin G. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. San Diego: Academic Press, 2002. xvii+499 pp.
2. Shi-Min Hu. *Conversion between triangular and rectangular Bézier patches // CAGD*. 2001. Vol. 18. P. 667–671.

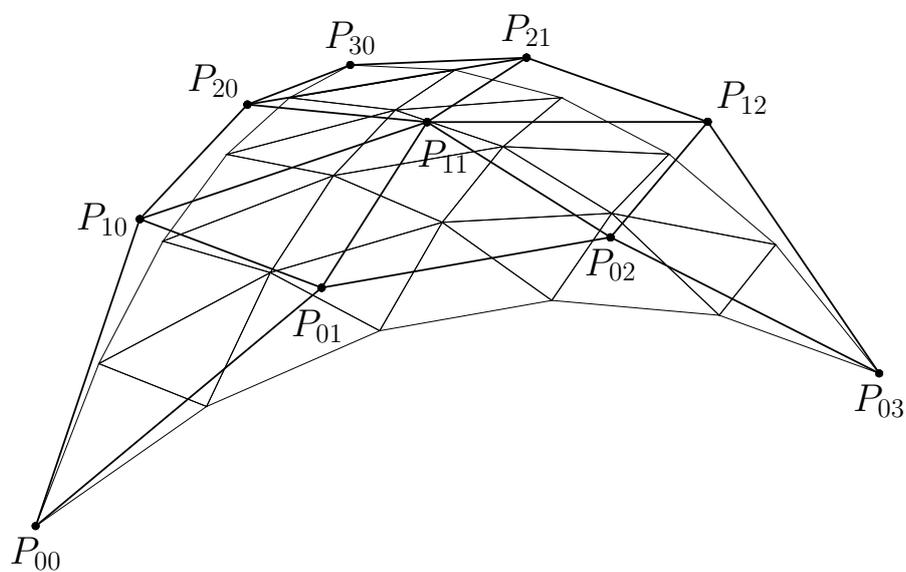


Рис. 1. График полинома $B_0(x, y)$, $(x, y) \in \Delta$.

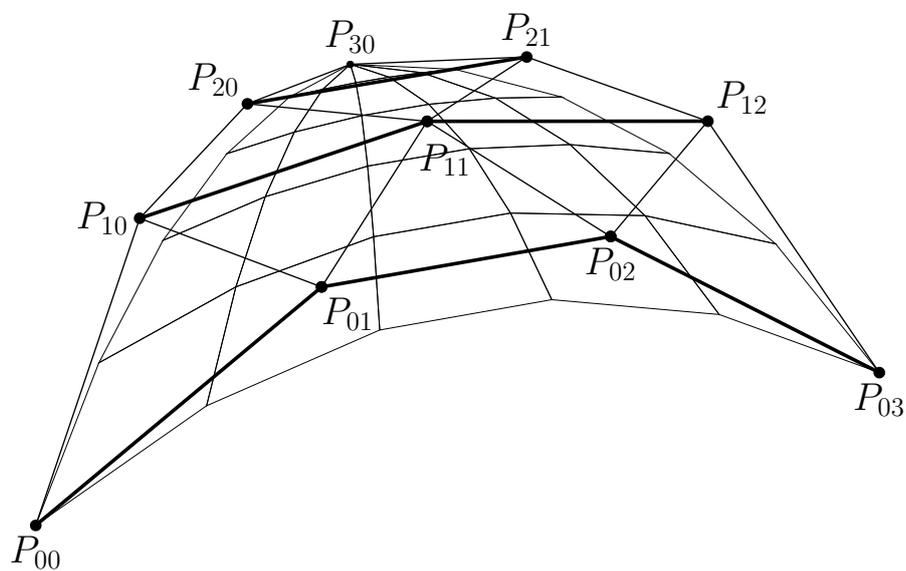


Рис. 2. График полинома $B_1(u, v)$, $(u, v) \in Q$.

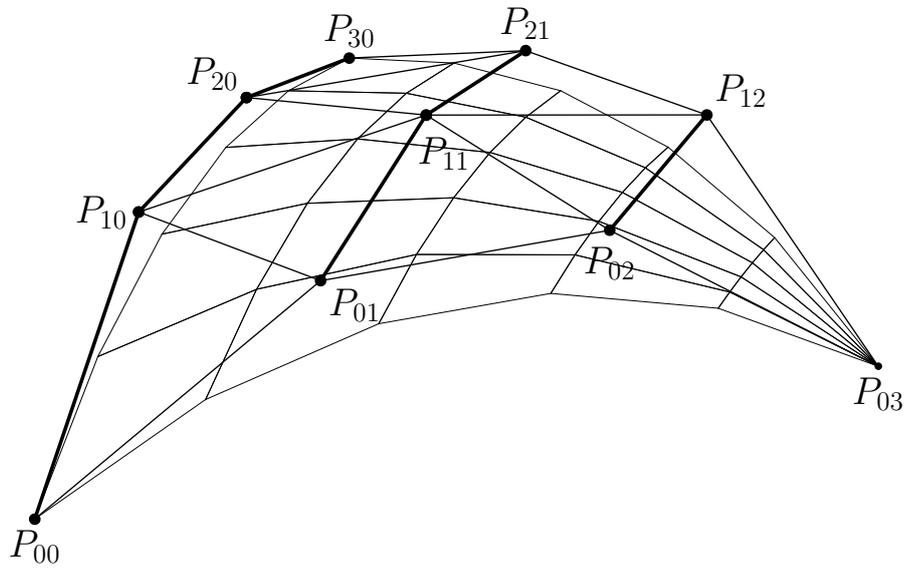


Рис. 3. График полинома $B_2(s, t)$, $(s, t) \in Q$.

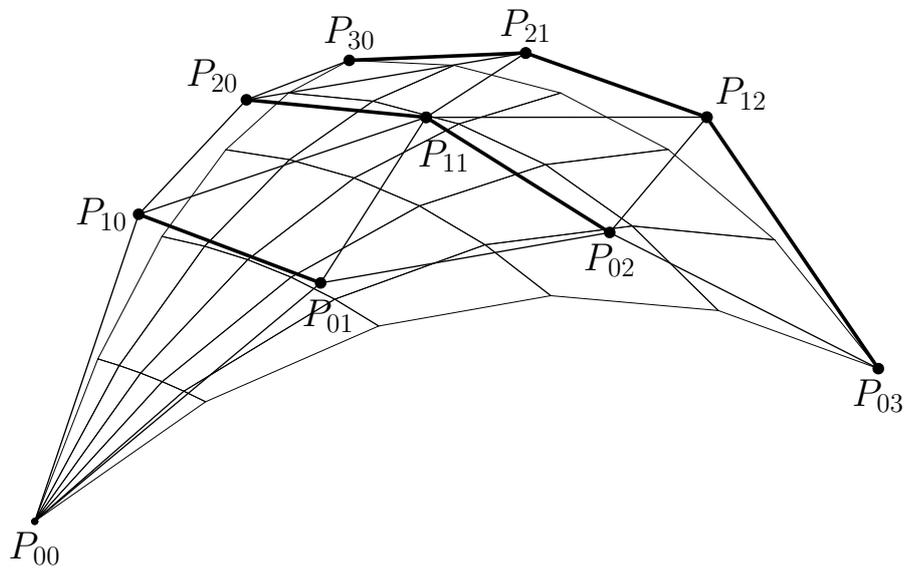


Рис. 4. График полинома $B_3(s, t)$, $(s, t) \in Q$.