МОЖНО ЛИ ПОСТРОИТЬ ОКРУЖНОСТЬ С ПОМОЩЬЮ КРИВЫХ БЕЗЬЕ?*

М. И. Григорьев — m_grigoriev@list.ru
В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru
А. Н. Сергеев — aser57@mail.ru

19 декабря 2006 г.

Доклад основан на материале из [1, Chapter 12].

1°. Зафиксируем три точки на плоскости $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, не лежащие на одной прямой, и три положительных числа w_0, w_1, w_2. По ним можно построить дробно-рациональную кривую Безье второго порядка

$$\mathfrak{R}(u) = \frac{w_0(1-u)^2 P_0 + 2w_1(1-u)u\, P_1 + w_2 u^2 P_2}{w_0(1-u)^2 + 2w_1(1-u)u + w_2u^2}, \qquad u \in [0,1]. \tag{1}$$

Геометрические соображения, приводящие к кривой (1), и метод вычисления $\mathfrak{R}(u)$ при фиксированном u описаны в [1, с. 209-215].

Введём обозначения $w = w_0(1-u)^2 + 2w_1(1-u)u + w_2u^2$,

$$\lambda_0 = \frac{w_0(1-u)^2}{w}, \quad \lambda_1 = \frac{2w_1(1-u)u}{w}, \quad \lambda_2 = \frac{w_2u^2}{w}.$$

Тогда (1) можно переписать в виде

$$\mathfrak{R}(u) = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, \tag{2}$$

где коэффициенты λ_i удовлетворяют условиям: они неотрицательны и в сумме равны единице. Это значит, что точка $\mathfrak{R}(u)$ при фиксированном $u \in [0,1]$ является выпуклой комбинацией точек P_0, P_1, P_2. Вся кривая $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}(u) \mid u \in [0,1]\}$ лежит в треугольнике с вершинами P_0, P_1, P_2. В частности, $\mathfrak{R}(0) = P_0$, $\mathfrak{R}(1) = P_2$.

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Зафиксируем $u \in (0,1)$. В этом случае все коэффициенты λ_i положительны. В силу определения λ_i

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{w_0}{2w_1}\,\frac{1-u}{u}, \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2w_1}{w_2}\,\frac{1-u}{u},$$

так что

$$\frac{2w_1}{w_0}\,\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{w_2}{2w_1}\,\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Обозначив $\mu = w_1^2/(w_0 w_2)$, получим

$$4\mu\lambda_0\lambda_2 = \lambda_1^2. \tag{3}$$

Таким образом, барицентрические координаты точек кривой $\mathfrak{R}(u)$ при $u \in (0,1)$ удовлетворяют соотношению (3). Соотношение (3) выполняется и при граничных значениях параметра $u = 0$, $u = 1$.

Если ввести множество $\mathfrak{B}$ точек P вида

$$P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2,$$

где коэффициенты λ_i неотрицательны, в сумме равны единице и удовлетворяют соотношению (3), то по существу доказано, что $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{B}$. Проверим обратное включение $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$.

Возьмём точку $P \in \mathfrak{B}$ с барицентрическими координатами λ_0, λ_1, λ_2. Нужно найти $u \in [0,1]$, такое, что $P = \mathfrak{R}(u)$. Если $\lambda_0 = 0$, то, согласно (3), $\lambda_1 = 0$. В этом случае $\lambda_2 = 1$ и $P = P_2 = \mathfrak{R}(1)$. При $\lambda_2 = 0$ будет $\lambda_1 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $P = P_0 = \mathfrak{R}(0)$. В дальнейшем считаем, что все коэффициенты λ_i положительны. Обозначим

$$f(u) = \frac{w_2 u^2}{w_0(1-u)^2 + 2w_1(1-u)u + w_2 u^2} = \frac{w_2 u^2}{w}$$

и покажем, что уравнение $f(u) = \lambda_2$ имеет единственное на $(0,1)$ решение. Ясно, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, поэтому достаточно проверить, что $f'(u) > 0$ на $(0,1)$. Запишем

$$f'(u) = w_2 u\,\frac{2w - uw'}{w^2}. \tag{4}$$

Поскольку $w' = 2[(w_1 - w_0)(1-u) + (w_2 - w_1)u]$, то

$$\begin{aligned} 2w - uw' = 2[w_0(1-u)^2 + 2w_1(1-u)u + w_2u^2 - \\ -(w_1 - w_0)(1-u)u - (w_2 - w_1)u^2] = \\ = 2[w_0(1-u)^2 + (w_1 + w_0)(1-u)u + w_1u^2]. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4) следует, что $f'(u) > 0$ при $u \in (0,1)$. Значит, существует единственное $u \in (0,1)$, такое, что $\lambda_2 = w_2u^2/w$. Покажем, что при этом $\lambda_1 = 2w_1(1-u)u/w$, $\lambda_0 = w_0(1-u)^2/w$. Тем самым будет установлено требуемое включение $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$.

Согласно (3), λ_1 (при фиксированном λ_2) является положительным корнем уравнения

$$\varphi(\lambda) := \lambda^2 - 4\mu\lambda_2\left((1-\lambda_2) - \lambda\right) = 0. \tag{5}$$

Производная $\varphi'(\lambda) = 2\lambda + 4\mu\lambda_2$ равна нулю при отрицательном $\lambda = -2\mu\lambda_2$, поэтому квадратное уравнение (5) имеет *единственный* положительный корень. Проверим, что $\lambda = 2w_1(1-u)u/w$ удовлетворяет (5). Действительно,

$$4\mu\lambda_2\left(1-\lambda_2-\frac{2w_1(1-u)u}{w}\right) = 4\,\frac{w_1^2}{w_0w_2}\,\frac{w_2u^2}{w}\,\frac{w_0(1-u)^2}{w} = \left(\frac{2w_1(1-u)u}{w}\right)^2.$$

Значит, $\lambda_1 = 2w_1(1-u)u/w$. Остаётся отметить, что

$$\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = w_0(1-u)^2/w.$$

Включение $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$, а с ним и равенство $\mathfrak{R} = \mathfrak{B}$, установлены.

Полученный результат можно сформулировать так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Дробно-рациональная кривая Безье второго порядка* (1) *в барицентрических (относительно точек P_0, P_1, P_2) координатах определяется уравнением* (3) *с $\mu = w_1^2/(w_0w_2)$.*

2°. Зафиксируем $r > 0$ и рассмотрим точки $P_0(r,0)$, $P_1(r,r)$, $P_2(0,r)$. Обозначим через $\mathcal{C}$ четверть окружности, построенную так, как показано на рис. 1.

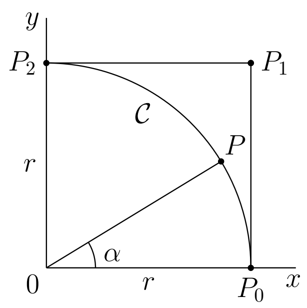

Рис. 1.

Выясним, существуют ли веса w_0, w_1, w_2, при которых соответствующая дробно-рациональная кривая Безье (1) совпадает с $\mathcal{C}$.

Возьмём точку $P \in \mathcal{C}$ с координатами $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Найдём её барицентрические координаты относительно P_0, P_1, P_2. Имеем

$$P = \lambda_0\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix},$$

так что

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_1 &= \cos\alpha, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= \sin\alpha, \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_0 = 1 - \sin\alpha, \qquad \lambda_2 = 1 - \cos\alpha, \qquad \lambda_1 = \sin\alpha + \cos\alpha - 1,$$

причём все λ_i неотрицательны. Далее

$$\lambda_1^2 = 2(1 - \sin\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) = 2(1 - \sin\alpha)(1 - \cos\alpha) = 2\lambda_0\lambda_2.$$

Значит, кривая $\mathcal{C}$ в барицентрических координатах определяется уравнением $\lambda_1^2 = 2\lambda_0\lambda_2$. Согласно предложению 1, $\mathcal{C}$ является дробно-рациональной кривой Безье второго порядка с параметром $\mu = \frac{1}{2}$. Поскольку $\mu = w_1^2/(w_0 w_2)$, то взяв, например, $w_0 = w_2 = 1$, $w_1 = \sqrt{2}/2$, получим кривую $\mathfrak{R}$, совпадающую с $\mathcal{C}$.

Как известно, кривая $\mathfrak{R}(u)$ вида (1) строится с помощью обычной кривой Безье в $\mathbb{R}^3$, порождённой точками $\widehat{P}_i(w_i x_i, w_i y_i, w_i)$, $i \in 0:2$. Поэтому на вопрос, поставленный в заголовке доклада, следует дать такой ответ: можно, если использовать кривые Безье в $\mathbb{R}^3$.

3°. Вернёмся к кривой $\mathfrak{R}(u)$ вида (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Кривая*

$$\widetilde{\mathfrak{R}}(t) = \frac{(1-t)^2 P_0 + 2\widetilde{w}_1(1-t)t\, P_1 + t^2 P_2}{(1-t)^2 + 2\widetilde{w}_1(1-t)t + t^2}, \qquad t \in [0,1], \tag{6}$$

с $\widetilde{w}_1 = \sqrt{\mu}$ *обладает тем свойством, что*

$$\{\mathfrak{R}(u) \mid u \in [0,1]\} = \{\widetilde{\mathfrak{R}}(t) \mid t \in [0,1]\}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим множества, стоящие в левой и правой частях равенства (7), через $\mathfrak{R}$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}$ соответственно. Проверим, что $\mathfrak{R} \subset \widetilde{\mathfrak{R}}$ и $\widetilde{\mathfrak{R}} \subset \mathfrak{R}$.

Воспользуемся отображением

$$u = \frac{t}{\rho(1-t) + t} \tag{8}$$

отрезка $[0,1]$ на себя при $\rho = \sqrt{w_2/w_0}$ с обратным отображением

$$t = \frac{\rho u}{(1-u) + \rho u}. \tag{9}$$

Зафиксируем $u \in [0,1]$ и представим его в виде (8). Подставив (8) в (1), получим

$$\mathfrak{R}(u) = \frac{w_0\rho^2(1-t)^2 P_0 + 2w_1\rho(1-t)t\, P_1 + w_2 t^2 P_2}{w_0\rho^2(1-t)^2 + 2w_1\rho(1-t)t + w_2 t^2} =$$

$$= \frac{w_2(1-t)^2 P_0 + 2w_1\sqrt{w_2/w_0}\,(1-t)t\,P_1 + w_2 t^2 P_2}{w_2(1-t)^2 + 2w_1\sqrt{w_2/w_0}\,(1-t)t + w_2 t^2}.$$

После деления числителя и знаменателя на w_2 придём к равенству $\mathfrak{R}(u)=\widetilde{\mathfrak{R}}(t)$, которое гарантирует, что $\mathfrak{R} \subset \widetilde{\mathfrak{R}}$.

Для проверки обратного включения зафиксируем $t \in [0,1]$ и представим его в виде (9). Подставив (9) в (6), получим

$$\widetilde{\mathfrak{R}}(t) = \frac{(1-u)^2 P_0 + 2\widetilde{w}_1\rho(1-u)u\,P_1 + \rho^2 u^2 P_2}{(1-u)^2 + 2\widetilde{w}_1\rho(1-u)u + \rho^2 u^2}. \tag{10}$$

Отметим, что $\widetilde{w}_1\rho = w_1/w_0$. После умножения числителя и знаменателя дроби (10) на w_0 придём к равенству $\widetilde{\mathfrak{R}}(t) = \mathfrak{R}(u)$, которое гарантирует, что $\widetilde{\mathfrak{R}} \subset \mathfrak{R}$. Предложение доказано. $\square$

Говорят, что дробно-рациональная кривая Безье (6) имеет *стандартную форму*. Согласно предложению 2 любая дробно-рациональная кривая Безье второго порядка может быть приведена к стандартной форме.

4°. Дадим классификацию дробно-рациональных кривых Безье второго порядка в зависимости от значений параметра μ.

Рассмотрим на плоскости три точки P_0, P_1, P_2, не лежащие на одной прямой. Систему декартовых координат введём так, как показано на рис. 2.

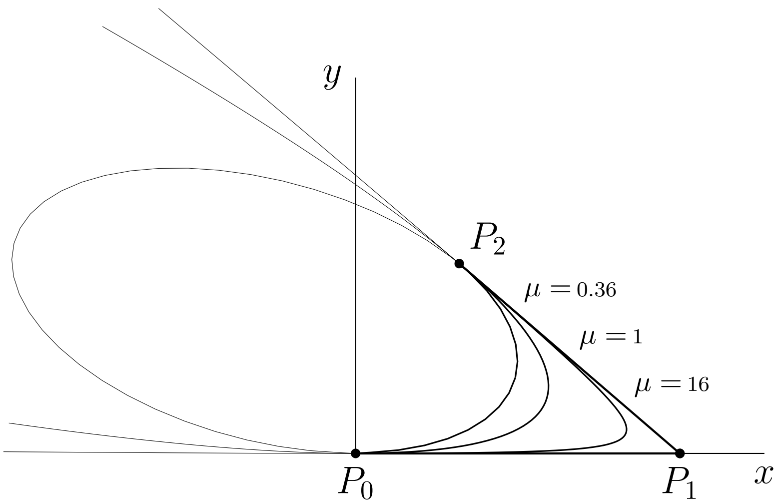

Рис. 2.

В этом случае $P_0 = P_0(0,0)$, $P_1 = P_1(x_1, 0)$, $P_2 = P_2(x_2, y_2)$, где $x_1 > 0$, $y_2 > 0$. При фиксированном $\mu > 0$ по точкам P_0, P_1, P_2 построим кривую $\widetilde{\mathfrak{R}}(t)$ вида (6).

Возьмём на ней точку $P(x,y)$ с барицентрическими координатами λ_0, λ_1, λ_2. Имеем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Приходим к системе соотношений

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= x, \\ \lambda_2 y_2 &= y. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_2 = \frac{y}{y_2}, \qquad \lambda_1 = \frac{xy_2 - yx_2}{x_1 y_2},$$
$$\lambda_0 = \frac{-xy_2 - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2}{x_1 y_2}.$$

Подставив это в (3) и умножив обе части равенства на $(x_1 y_2)^2$, получим

$$4\mu y x_1 \left[-xy_2 - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2\right] - (xy_2 - yx_2)^2 = 0.$$

Данное уравнение преобразуется к виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a = 0, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} &a_{11} = -y_2^2, \quad a_{22} = -4\mu x_1(x_1 - x_2) - x_2^2, \\ &a_{12} = -2\mu x_1 y_2 + x_2 y_2, \\ &a_1 = 0, \quad a_2 = 2\mu x_1^2 y_2, \quad a = 0. \end{aligned}$$

Инвариантами уравнения (11) являются два определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и число $\varepsilon = a_{11} + a_{22}$. Вычислим их. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} -y_2^2 & -2\mu x_1 y_2 + x_2 y_2 & 0 \\ -2\mu x_1 y_2 + x_2 y_2 & -4\mu x_1(x_1 - x_2) - x_2^2 & 2\mu x_1^2 y_2 \\ 0 & 2\mu x_1^2 y_2 & 0 \end{vmatrix} = 4\mu^2 x_1^4 y_2^4,$$

$$\begin{aligned}\delta = y_2^2[4\mu x_1(x_1 - x_2) - x_2^2] - (-2\mu x_1 y_2 + x_2 y_2)^2 =\\ = 4\mu x_1(x_1 - x_2)y_2^2 - 4\mu^2 x_1^2 y_2^2 + 4\mu x_1 x_2 y_2^2 = 4\mu x_1^2 y_2^2(1-\mu),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -[y_2^2 + (x_2^2 - 4\mu x_1 x_2 + 4\mu x_1^2)] =\\ &= -[y_2^2 + (x_2 - 2\mu x_1)^2 + 4\mu x_1^2(1-\mu)].\end{aligned}$$

Отметим, что $\Delta > 0$. При $\mu < 1$ выполняются неравенства $\delta > 0$ и $\varepsilon < 0$.

На основании результатов о классификации кривых второго порядка [2] приходим к следующему заключению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Дробно-рациональная кривая Безье второго порядка является дугой параболы при $\mu = 1$, гиперболы при $\mu > 1$ и эллипса при $\mu \in (0, 1)$.*

На рис. 2 представлены все три случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Farin G. *Curves and surfaces for CAGD.* 5th ed. Academic Press, 2002.

2. Привалов И. И. *Аналитическая геометрия.* 35-е изд. Лань, 2005.