СОСТАВНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

10 февраля 2006 г.

1°. Мы будем использовать следующие обозначения из [1].

L_1, L_2, L_3, L_4 — линейные операторы, определяемые для непрерывно дифференцируемых вектор-функций $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$L_1(f) = f(0), \quad L_2(f) = f'(0), \quad L_3(f) = f'(1), \quad L_4(f) = f(1).$$

H_1, H_2, H_3, H_4 — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0, 1]$ функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned}
&H_1(0) = 1, \quad H_1'(0) = 0, \quad H_1'(1) = 0, \quad H_1(1) = 0;\\
&H_2(0) = 0, \quad H_2'(0) = 1, \quad H_2'(1) = 0, \quad H_2(1) = 0;\\
&H_3(0) = 0, \quad H_3'(0) = 0, \quad H_3'(1) = 1, \quad H_3(1) = 0;\\
&H_4(0) = 0, \quad H_4'(0) = 0, \quad H_4'(1) = 0, \quad H_4(1) = 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

В качестве H_i могут быть использованы кубические полиномы Эрмита:

$$\begin{aligned}
H_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1,\\
H_2(x) &= x^3 - 2x^2 + x,\\
H_3(x) &= x^3 - x^2,\\
H_4(x) &= -2x^3 + 3x^2.
\end{aligned}$$

В [1] доказано, что если вектор-функции $f_i, g_i \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $i \in 1 : 4$ удовлетворяют условиям

$$L_j(f_i) = L_i(g_j), \qquad i, j \in 1 : 4, \tag{2}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

то поверхность, задаваемая вектор-функцией

$$c(u,v) = \sum_{i=1}^{4} H_i(u)\, f_i(v) + \sum_{j=1}^{4} H_j(v)\, g_j(u) - \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} H_i(u)\, H_j(v)\, L_i(g_j), \tag{3}$$

будет удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} L_i\big(c(\cdot,v)\big) &= f_i(v), \qquad v \in [0,1], \quad i \in 1:4\,; \\ L_j\big(c(u,\cdot)\big) &= g_j(u), \qquad u \in [0,1], \quad j \in 1:4\,. \end{aligned} \tag{4}$$

2°. Пусть заданы два набора кривых

$$a_i \colon [0,n] \to \mathbb{R}^3, \quad i \in 0:m, \qquad b_j \colon [0,m] \to \mathbb{R}^3, \quad j \in 0:n,$$

причём $a_i \in C^1\big([0,n]\big)$, $b_j \in C^1\big([0,m]\big)$, и кривые пересекаются в соответствующих точках:

$$a_i(j) = b_j(i) \qquad \forall\, i \in 0:m,\;\; j \in 0:n. \tag{5}$$

Кроме того, пусть заданы векторы $d_{ij} \in \mathbb{R}^3$, $i \in 0:m$, $j \in 0:n$. Покажем как построить поверхность, натянутую на кривые a_i, b_j.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Существует поверхность, задаваемая вектор-функцией* $s\colon [0,m] \times [0,n] \to \mathbb{R}^3$, *которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) $s = s(\alpha,\beta)$, $s \in C^1$, $s_{\alpha\beta}, s_{\beta\alpha} \in C$;

2) $s(i,\beta) = a_i(\beta)$, $\forall\, i \in 0:m$, $\beta \in [0,n]$;

3) $s(\alpha,j) = b_j(\alpha)$, $\forall\, j \in 0:n$, $\alpha \in [0,m]$;

4) $s_{\alpha\beta}(i,j) = d_{ij}$, $\forall\, i \in 0:m$, $j \in 0:n$.

Доказательство. Будем строить требуемую поверхность путём соединения параметрических поверхностей Кунса для участков $[i,i+1] \times [j,j+1]$.

Для каждого $i \in 0:m$ определим вектор-функцию $A_i(\beta)$, положив для β из отрезка $[j,j+1]$, $j \in 0:n-1$,

$$A_i(\beta) = H_1(\beta-j)\, b'_j(i) + H_2(\beta-j)\, d_{ij} + H_3(\beta-j)\, d_{i,j+1} + H_4(\beta-j)\, b'_{j+1}(i).$$

Из (1) следует, что

$$A_i(j) = b'_j(i), \quad A'_i(j) = d_{ij} \qquad \forall\, i \in 0:m,\;\; j \in 0:n, \tag{6}$$

причём эти равенства получаются как по формуле для отрезка $[j-1,j]$, так и по формуле для отрезка $[j,j+1]$. Таким образом, $A_i \in C^1\big([0,n]\big)$.

Аналогично, для каждого $j \in 0:n$ определим вектор-функцию $B_j(\alpha)$:

$$B_j(\alpha) = H_1(\alpha - i)\, a'_i(j) + H_2(\alpha - i)\, d_{ij} + H_3(\alpha - i)\, d_{i+1,j} + H_4(\alpha - i)\, a'_{i+1}(j),$$
$$\alpha \in [i, i+1], \quad i \in 0 : m-1.$$

Как и в предыдущем случае, выполнено

$$B_j(i) = a'_i(j), \quad B'_j(i) = d_{ij} \qquad \forall\, i \in 0:m, \;\; j \in 0:n, \tag{7}$$

и $B_j \in C^1\big([0, m]\big)$.

Зафиксируем $i \in 0 : m-1$, $j \in 0 : n-1$ и положим

$$f_1(v) = a_i(j+v), \quad f_2(v) = A_i(j+v), \quad f_3(v) = A_{i+1}(j+v), \quad f_4(v) = a_{i+1}(j+v),$$
$$g_1(u) = b_j(i+u), \quad g_2(u) = B_j(i+u), \quad g_3(u) = B_{j+1}(i+u), \quad g_4(u) = b_{j+1}(i+u).$$

Покажем, что f_k, g_l удовлетворяют условиям (2). Согласно (5), имеем

$$\begin{aligned}
L_1(g_1) &= b_j(i) = a_i(j) = L_1(f_1),\\
L_4(g_1) &= b_j(i+1) = a_{i+1}(j) = L_1(f_4),\\
L_1(g_4) &= b_{j+1}(i) = a_i(j+1) = L_4(f_1),\\
L_4(g_4) &= b_{j+1}(i+1) = a_{i+1}(j+1) = L_4(f_4).
\end{aligned}$$

Используя (6) и (7), последовательно получаем

$$\begin{aligned}
L_1(g_2) &= B_j(i) = a'_i(j) = L_2(f_1),\\
L_1(g_3) &= B_{j+1}(i) = a'_i(j+1) = L_3(f_1),\\
L_4(g_2) &= B_j(i+1) = a'_{i+1}(j) = L_2(f_4),\\
L_4(g_3) &= B_{j+1}(i+1) = a'_{i+1}(j+1) = L_3(f_4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2(g_1) &= b'_j(i) = A_i(j) = L_1(f_2),\\
L_2(g_4) &= b'_{j+1}(i) = A_i(j+1) = L_4(f_2),\\
L_3(g_1) &= b'_j(i+1) = A_{i+1}(j) = L_1(f_3),\\
L_3(g_4) &= b'_{j+1}(i+1) = A_{i+1}(j+1) = L_4(f_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2(g_2) &= B'_j(i) = d_{ij} = A'_i(j) = L_2(f_2),\\
L_2(g_3) &= B'_{j+1}(i) = d_{i,j+1} = A'_i(j+1) = L_3(f_2),\\
L_3(g_2) &= B'_j(i+1) = d_{i+1,j} = A'_{i+1}(j) = L_2(f_3),\\
L_3(g_3) &= B'_{j+1}(i+1) = d_{i+1,j+1} = A'_{i+1}(j+1) = L_3(f_3).
\end{aligned}$$

Итак, условия (2) выполнены. По формуле (3) построим вектор-функцию c^{ij}, задающую параметрическую поверхность Кунса.

Определим теперь вектор-функцию $s(\alpha, \beta)$ на $[0, m] \times [0, n]$. Пусть

$$s(\alpha, \beta) = c^{ij}(\alpha - i, \beta - j),$$

где

$$i = \begin{cases} \lfloor \alpha \rfloor, & \text{если } \alpha < m, \\ m - 1, & \text{если } \alpha = m, \end{cases} \qquad j = \begin{cases} \lfloor \beta \rfloor, & \text{если } \beta < n, \\ n - 1, & \text{если } \beta = n. \end{cases}$$

Проверим, что для s выполнены условия 1–4 из формулировки предложения.

Так как c^{ij} задаёт поверхность Кунса, то для неё выполнены условия (4), то есть

$$\begin{aligned} c^{ij}(0, v) &= a_i(j + v), \quad & c^{ij}(1, v) &= a_{i+1}(j + v) \qquad & \forall\, v \in [0, 1], \\ c^{ij}(u, 0) &= b_j(i + u), \quad & c^{ij}(u, 1) &= b_{j+1}(i + u) \qquad & \forall\, u \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Отсюда сразу видно, что s непрерывна и выполнены условия 2 и 3. Кроме того, из (4) для c^{ij} следует, что

$$\begin{aligned} c^{ij}_u(0, v) &= A_i(j + v), \quad & c^{ij}_u(1, v) &= A_{i+1}(j + v) \qquad & \forall\, v \in [0, 1], \\ c^{ij}_v(u, 0) &= B_j(i + u), \quad & c^{ij}_v(u, 1) &= A_{j+1}(i + u) \qquad & \forall\, u \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Докажем теперь непрерывность s_α, s_β, $s_{\alpha\beta}$, $s_{\beta\alpha}$. Достаточно проверить непрерывность для тех точек $(\alpha, \beta) \in (0, m) \times (0, n)$, в которых стыкуются разные поверхности Кунса, то есть либо β, либо α — целое число. Предположим для определённости, что α — целое, то есть $\alpha = i \in 1 : m - 1$. Пусть $j = \lfloor \beta \rfloor$. Тогда

$$\begin{aligned} s_\alpha(i - 0, \beta) &= c^{i-1,j}_u(1, \beta - j) = A_i(\beta) = c^{ij}_u(0, \beta - j) = s_\alpha(i + 0, \beta), \\ s_\beta(i - 0, \beta) &= c^{i-1,j}_v(1, \beta - j) = a_i'(\beta) = c^{ij}_v(0, \beta - j) = s_\beta(i + 0, \beta), \\ s_{\alpha\beta}(i - 0, \beta) &= c^{i-1,j}_{uv}(1, \beta - j) = A_i'(\beta) = c^{ij}_{uv}(0, \beta - j) = s_{\alpha\beta}(i + 0, \beta). \\ s_{\beta\alpha}(i - 0, \beta) &= c^{i-1,j}_{vu}(1, \beta - j) = c^{i-1,j}_{uv}(1, \beta - j) = A_i'(\beta) = \\ &= c^{ij}_{uv}(0, \beta - j) = c^{ij}_{vu}(0, \beta - j) = s_{\beta\alpha}(i + 0, \beta). \end{aligned}$$

Таким образом, s_α, s_β, $s_{\alpha\beta}$ и $s_{\beta\alpha}$ непрерывны на $[0, m] \times [0, n]$. Кроме того, поскольку $s_{\alpha\beta}(i, j) = A_i'(j) = d_{ij}$, то выполнено условие 4.

Итак, для построенной вектор-функции s выполнены условия 1–4, что и требовалось доказать. □

З а м е ч а н и е. Векторы d_{ij}, участвующие в построении составной поверхности Кунса, можно выбирать различными способами. В частности, можно положить $d_{ij} = 0$, но в таком случае на поверхности возможно появление нежелательных участков уплощения. Чтобы этого избежать, часто используется приём Адини, который заключается в следующем.

Пусть $i \in 1:m-1$, $j \in 1:n-1$. Возьмём участки кривых $a_{i-1}(\beta)$ и $a_{i+1}(\beta)$ при $\beta \in [j-1, j+1]$, $b_{j-1}(\alpha)$ и $b_{j+1}(\alpha)$ при $\alpha \in [i-1, i+1]$ в качестве граничных кривых и построим по ним билинейную поверхность Кунса:

$$\begin{aligned} c(\alpha,\beta) = {} & \tfrac{i+1-\alpha}{2}\, a_{i-1}(\beta) + \tfrac{\alpha-i+1}{2}\, a_{i+1}(\beta) + \tfrac{j+1-\beta}{2}\, b_{j-1}(\alpha) + \tfrac{\beta-j+1}{2}\, b_{j+1}(\alpha) - \\ & - \tfrac{(i+1-\alpha)(j+1-\beta)}{4}\, a_{i-1}(j-1) - \tfrac{(i+1-\alpha)(\beta-j+1)}{4}\, a_{i-1}(j+1) - \\ & - \tfrac{(\alpha-i+1)(j+1-\beta)}{4}\, a_{i+1}(j-1) - \tfrac{(\alpha-i+1)(\beta-j+1)}{4}\, a_{i+1}(j+1). \end{aligned}$$

Теперь в качестве d_{ij} возьмём значение смешанной производной построенной функции:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= c_{\alpha\beta}(i,j) = \\ &= \frac{a'_{i+1}(j) - a'_{i-1}(j)}{2} + \frac{b'_{j+1}(i) - b'_{j-1}(i)}{2} - \\ &- \frac{a_{i-1}(j-1) - a_{i-1}(j+1) - a_{i+1}(j-1) + a_{i+1}(j+1)}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы определили значения d_{ij} для $i \in 1:m-1$, $j \in 1:n-1$. Для оставшихся точек можно положить $d_{ij} = 0$.

ПРИМЕР 1. Пусть $m = 2$, $n = 3$, $d_{ij} = 0$,

$$\begin{aligned} a_0(v) &= (0,\, 0,\, 2), & b_0(u) &= \big(u,\, 0,\, (u-1)(u-2)\big), \\ a_1(v) &= \left(\cos\tfrac{\pi v}{2},\, \sin\tfrac{\pi v}{2},\, 0\right), & b_1(u) &= \big(0,\, u,\, (u-1)(u-2)\big), \\ a_2(v) &= \left(2\cos\tfrac{\pi v}{2},\, 2\sin\tfrac{\pi v}{2},\, 0\right), & b_2(u) &= \big(-u,\, 0,\, (u-1)(u-2)\big), \\ & & b_3(u) &= \big(0,\, -u,\, (u-1)(u-2)\big). \end{aligned}$$

Кривые a_i, b_j изображены на рис. 1, а составная поверхность Кунса для них приведена на рис. 2.

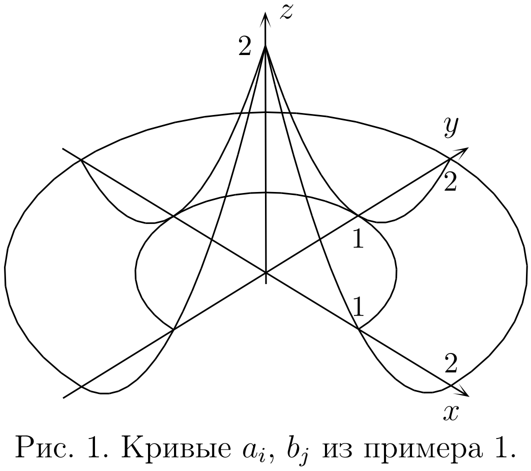

Рис. 1. Кривые a_i, b_j из примера 1.

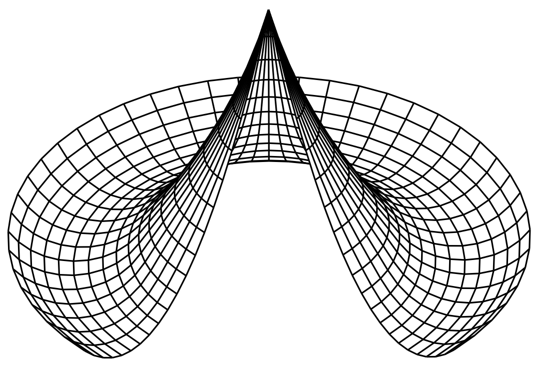

Рис. 2. Составная поверхность Кунса для кривых из примера 1.

ПРИМЕР 2. Пусть $m = 1$, $n = 4$, $d_{ij} = 0$,

$$a_0(v) = \left(\frac{5+\cos 2\pi v}{2}\cos\frac{\pi v}{2},\ \frac{5+\cos 2\pi v}{2}\sin\frac{\pi v}{2},\ 0\right),$$
$$a_1(v) = \left(-\frac{5+\cos 2\pi v}{2}\sin\frac{\pi v}{2},\ \frac{5+\cos 2\pi v}{2}\cos\frac{\pi v}{2},\ 6\right),$$

$b_0(u) = (3-3u,\ 3u,\ 6u)$, $b_1(u) = (-3u,\ 3-3u,\ 6u)$, $b_2(u) = (3u-3,\ -3u,\ 6u)$, $b_3(u) = (3u,\ 3u-3,\ 6u)$, $b_4(u) = (3-3u,\ 3u,\ 6u)$.

Кривые a_i, b_j изображены на рис. 3. Заметим, что кривые a_0 и a_1 замкнутые, а $b_0(u) \equiv b_4(u)$, поэтому поверхность Кунса будет замкнутой (см. рис. 4).

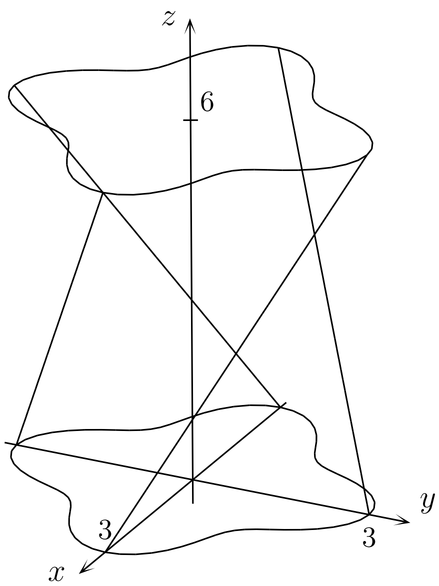

Рис. 3. Кривые a_i, b_j из примера 2.

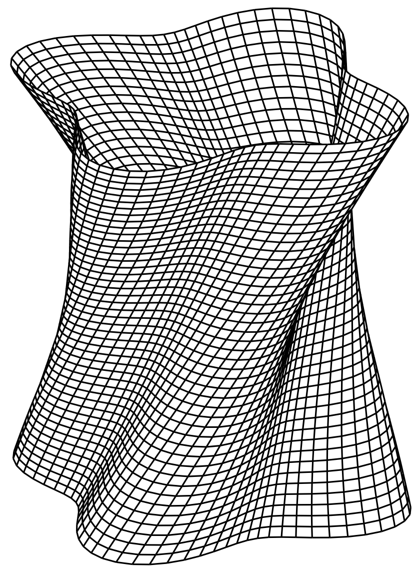

Рис. 4. Составная поверхность Кунса для кривых из примера 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н., Чашников Н. В. *Бикубические поверхности Кунса* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 23 января 2007 г.

2. G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. Academic Press, 2002.