БИЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА И ПОВЕРХНОСТИ БЕЗЬЕ*

Н. В. Чашников
nik239@list.ru

18 ноября 2006 г.

1°. Пусть $D = [0,1]^2$, $\Gamma = \partial D$. Ставится задача: *построить по вектор-функции* $b\colon \Gamma \to \mathbb{R}^3$ *возможно более простую вектор-функцию* $c\colon D \to \mathbb{R}^3$, *удовлетворяющую условию*

$$c|_\Gamma \equiv b. \tag{1}$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию этой задачи. Вектор-функция $c(u,v)$ задаёт поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, состоящую из точек $c(u,v)$ при u, $v \in [0,1]$. Вектор-функция $b(u,v)$ задаёт 4 кривые,

$$\begin{gathered}\bigl\{b(u,0) \mid u \in [0,1]\bigr\}, \quad \bigl\{b(u,1) \mid u \in [0,1]\bigr\},\\ \bigl\{b(0,v) \mid v \in [0,1]\bigr\}, \quad \bigl\{b(1,v) \mid v \in [0,1]\bigr\},\end{gathered}$$

пересекающихся в точках $b(0,0)$, $b(0,1)$, $b(1,0)$, $b(1,1)$. Условие (1) в таком случае означает, что кривые, задаваемые вектор-функцией b, являются граничными кривыми для поверхности, задаваемой вектор-функцией c.

Определим вектор-функцию $c\colon D \to \mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$c(u,v) = c_1(u,v) + c_2(u,v) - c_3(u,v), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} c_1(u,v) &= (1-u)b(0,v) + u\,b(1,v),\\ c_2(u,v) &= (1-v)b(u,0) + v\,b(u,1),\\ c_3(u,v) &= (1-u)(1-v)\,b(0,0) + (1-u)\,v\,b(0,1) +\\ &\qquad + u(1-v)\,b(1,0) + u\,v\,b(1,1). \end{aligned}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Вектор-функция $c(u,v)$ вида* (2) *удовлетворяет условию* (1).

Доказательство. Требуется показать, что для любой пары $(u,v) \in \Gamma$ выполнено $c(u,v) = b(u,v)$. Так как $(u,v) \in \Gamma$, то либо $u = 0$, либо $u = 1$, либо $v = 0$, либо $v = 1$. Если $u = 0$, то

$$\begin{aligned} c(u,v) = c(0,v) = b(0,v) + (1-v)\,b(0,0) + v\,b(0,1) - (1-v)\,b(0,0) - v\,b(0,1) = \\ = b(0,v) = b(u,v), \end{aligned}$$

остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Поверхность, задаваемая вектор-функцией вида (2), называется *билинейной поверхностью Кунса.*

ПРИМЕР 1. Пусть граничные кривые определены следующим образом (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} b(u,0) &= (u,\,0,\,0), \quad b(u,1) = \big(u,\,1,\,u(1-u)\big), \\ b(0,v) &= (0,\,v,\,0), \quad b(1,v) = \big(1,\,v,\,v(1-v)\big). \end{aligned}$$

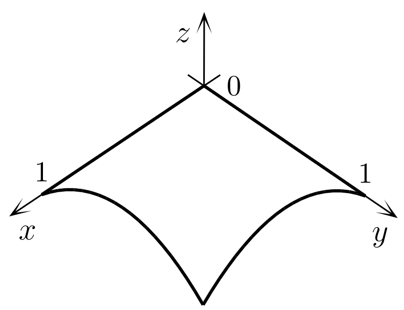

Рис. 1. Граничные кривые.

Вектор-функция c_1 задаёт *линейчатую поверхность*, образованную множеством отрезков с концами $b(0,v)$ и $b(1,v)$ (см. рис. 2), вектор-функция c_2 — линейчатую поверхность, образованную множеством отрезков с концами $b(u,0)$ и $b(u,1)$ (см. рис. 3), а вектор-функция c_3 — линейчатую поверхность, образованную множеством отрезков с концами, лежащими на отрезках от $b(0,0)$ к $b(0,1)$ и от $b(1,0)$ к $b(1,1)$ (см. рис. 4). Поверхность Кунса изображена на рис. 5.

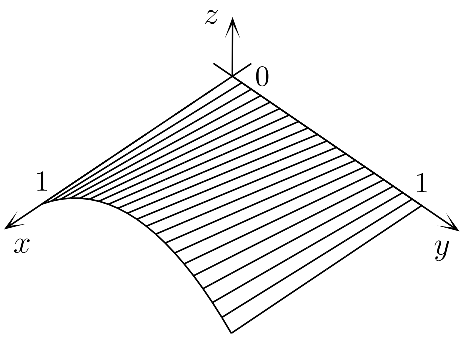

Рис. 2. $c_1(u, v)$.

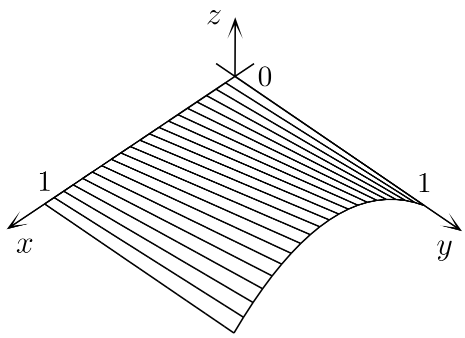

Рис. 3. $c_2(u, v)$.

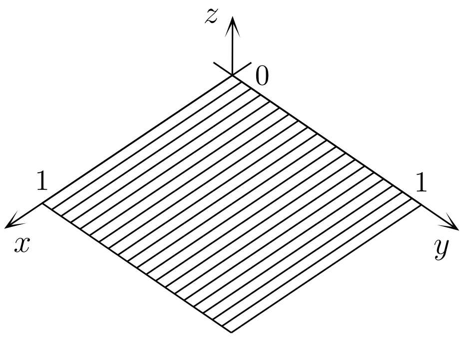

Рис. 4. $c_3(u, v)$.

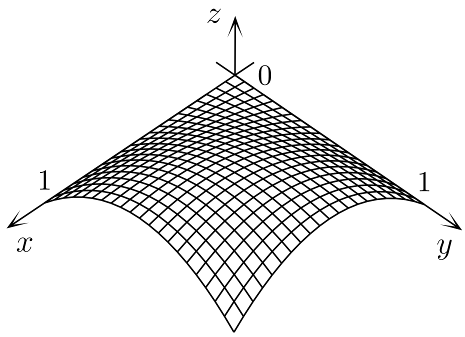

Рис. 5. Поверхность Кунса.

2°. Мы определили поверхность Кунса в случае, когда областью изменения параметров u и v является квадрат $D = [0, 1]^2$. Аналогичную поверхность можно построить, если заменить D на прямоугольник $E = [u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$, с границей $S = \partial E$. Здесь u_0, u_1, v_0 и v_1 — произвольные вещественные числа, для которых выполнены неравенства $u_0 < u_1$, $v_0 < v_1$. Нетрудно видеть, что в таком случае формула для поверхности Кунса, удовлетворяющая условию $c|_S = b$, будет выглядеть следующим образом:

$$c(u, v) = c_1(u, v) + c_2(u, v) - c_3(u, v), \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1(u, v) &= \frac{u_1 - u}{u_1 - u_0}\, b(u_0, v) + \frac{u - u_0}{u_1 - u_0}\, b(u_1, v), \\
c_2(u, v) &= \frac{v_1 - v}{v_1 - v_0}\, b(u, v_0) + \frac{v - v_0}{v_1 - v_0}\, b(u, v_1), \\
c_3(u, v) &= \frac{u_1 - u}{u_1 - u_0}\, \frac{v_1 - v}{v_1 - v_0}\, b(u_0, v_0) + \frac{u_1 - u}{u_1 - u_0}\, \frac{v - v_0}{v_1 - v_0}\, b(u_0, v_1) + \\
&\quad + \frac{u - u_0}{u_1 - u_0}\, \frac{v_1 - v}{v_1 - v_0}\, b(u_1, v_0) + \frac{u - u_0}{u_1 - u_0}\, \frac{v - v_0}{v_1 - v_0}\, b(u_1, v_1).
\end{aligned}$$

Пусть $E' = [u'_0, u'_1] \times [v'_0, v'_1] \subset E$, $S' = \partial E'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть вектор-функция $c(u,v)$ построена по формуле (3) для некоторой функции b, а вектор-функция $e\colon E' \to \mathbb{R}^3$ построена по той же формуле, но для граничной функции $d = c|_{S'}$. Тогда $e \equiv c|_{E'}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $E = [0,1]^2$, $E' = [0,u_1]\times$ $\times[0,1]$. По формуле (3) для $(u,v) \in E'$ имеем:

$$\begin{aligned} e(u,v) = \frac{u_1-u}{u_1}\,c(0,v) + \frac{u}{u_1}\,c(u_1,v) + (1-v)\,c(u,0) + v\,c(u,1) &- \\ - \frac{u_1-u}{u_1}\,(1-v)\,c(0,0) - \frac{u_1-u}{u_1}\,v\,c(0,1) &- \\ - \frac{u}{u_1}\,(1-v)\,c(u_1,0) - \frac{u}{u_1}\,v\,c(u_1,1).& \end{aligned}$$

Подставим значение $c(u_1,v)$ из формулы (2). Учитывая, что $c|_\Gamma \equiv b$, получаем:

$$\begin{aligned} e(u,v) = \frac{u_1-u}{u_1}\,b(0,v) + \frac{u}{u_1}\Big[(1-u_1)\,b(0,v) + u_1\,b(1,v) + (1-v)\,b(u_1,0) &+ \\ + v\,b(u_1,1) - (1-u_1)(1-v)\,b(0,0) - (1-u_1)\,v\,b(0,1) &- \\ - u_1\,(1-v)\,b(1,0) - u_1\,v\,b(1,1)\Big] + (1-v)\,b(u,0) + v\,b(u,1) &- \\ - \frac{u_1-u}{u_1}\,(1-v)\,b(0,0) - \frac{u_1-u}{u_1}\,v\,b(0,1) &- \\ - \frac{u}{u_1}\,(1-v)\,b(u_1,0) - \frac{u}{u_1}\,v\,b(u_1,1).& \end{aligned}$$

После раскрытия скобок придём к формуле

$$\begin{aligned} e(u,v) = (1-u)\,b(0,v) + u\,b(1,v) - (1-u)(1-v)\,b(0,0) - (1-u)\,v\,b(0,1) &- \\ - u\,(1-v)\,b(1,0) - u\,v\,b(0,0) + (1-v)\,b(u,0) + v\,b(u,1) &= \\ = c(u,v).& \end{aligned}$$

Итак, для случая $E = [0,1]^2$, $E' = [0,u_1]\times[0,1]$ утверждение доказано. При помощи замены переменных $(u,v) \mapsto (1-u,v)$ получим, что оно выполнено для случая $E = [0,1]^2$, $E' = [1-u_1,1]\times[0,1]$. Используя перестановку переменных $(u,v) \mapsto (v,u)$, установим, что утверждение выполнено для случаев $E = [0,1]^2$, $E' = [0,1]\times[0,v_1]$ и $E = [0,1]^2$, $E' = [0,1]\times[v_0,1]$. Наконец, при помощи линейной замены переменных получим, что утверждение верно для случаев, когда $E = [u_0,u_1]\times[v_0,v_1]$, а $E' = [u'_0,u_1]\times[v_0,v_1]$, либо $E' = [u_0,u'_1]\times[v_0,v_1]$, либо $E' = [u_0,u_1]\times[v'_0,v_1]$, либо $E' = [u_0,u_1]\times[v_0,v'_1]$.

Рассмотрим теперь общий случай: $E = [u_0,u_1]\times[v_0,v_1]$, $E' = [u'_0,u'_1]\times[v'_0,v'_1]$. Пусть вектор-функция $c\colon E \to \mathbb{R}^3$ построена по формуле (3) для некоторой граничной функции $b\colon \partial E \to \mathbb{R}^3$. Пусть $E_1 = [u_0, u_1'] \times [v_0, v_1]$. Построим вектор-функцию e_1 по формуле (3) для граничной функции $c|_{\partial E_1}$. Доказано, что $e_1 \equiv c|_{E_1}$. Пусть $E_2 = [u_0', u_1'] \times [v_0, v_1]$. Построим вектор-функцию e_2 по формуле (3) для граничной функции $e_1|_{\partial E_2}$. Утверждение для множеств E_1, E_2 уже доказано, поэтому $e_2 \equiv e_1|_{E_2} \equiv c|_{E_2}$. Далее рассмотрим множество $E_3 = [u_0', u_1'] \times [v_0, v_1']$ и построим вектор-функцию e_3 по формуле (3) для граничной функции $e_2|_{\partial E_3}$. Тогда будет выполнено $e_3 \equiv e_2|_{E_3} \equiv c|_{E_3}$. И наконец, рассмотрим множество $[u_0', u_1'] \times [v_0', v_1'] = E'$ и построим вектор-функцию $e(u, v)$ по формуле (3) для граничной функции $e_3|_{\partial E'} \equiv c|_{\partial E'} \equiv d$. Тогда будет выполнено $e \equiv e_3|_{E'} \equiv c|_{E'}$, что и требовалось доказать. □

Замечание. Доказанное предложение имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть для некоторых граничных кривых построена поверхность Кунса. Возьмём прямоугольную область параметров, являющуюся подмножеством исходной, и рассмотрим кривые на поверхности Кунса, соответствующие значениям параметров на границе этой области. По этим кривым можно построить новую поверхность Кунса. По доказанному предложению, эта поверхность будет являться подмножеством исходной поверхности Кунса.

3°. Существует бесконечное множество поверхностей, проходящих через заданные граничные кривые. Поверхность Кунса выделяется из этого множества тем, что она обладает свойством *минимизации искривления.*

Пусть заданы граничные кривые $b\colon \Gamma \to \mathbb{R}^3$, причём

$$b(0, v),\ b(1, v),\ b(u, 0),\ b(u, 1)\ \in C^1\big([0, 1]\big). \tag{4}$$

Обозначим

$$\Phi = \Big\{a\colon D \to \mathbb{R}^3 \ \Big|\ a \in C^1(D),\ a_{uv}, a_{vu} \in C(D),\ a|_\Gamma \equiv b\Big\}.$$

Заметим, что если $a_{uv}, a_{vu} \in C(D)$, то $a_{uv} \equiv a_{vu}$. Положим

$$G(a) = \iint_D \big\|a_{uv}(u, v)\big\|^2\, du\, dv, \quad a \in \Phi,$$

и рассмотрим задачу минимизации функционала G на множестве Φ:

$$G(a) \longrightarrow \min, \quad a \in \Phi. \tag{5}$$

Будем решать эту задачу отдельно для каждой координаты.

Пусть $a(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$, $b(u, v) = \big(x^0(u, v), y^0(u, v), z^0(u, v)\big)$. Обозначим

$$\Omega = \Big\{x\colon D \to \mathbb{R} \ \Big|\ x \in C^1(D),\ x_{uv}, x_{vu} \in C(D),\ x|_\Gamma \equiv x^0\Big\},$$

$$F(x) = \iint_D \big[x_{uv}(u,v)\big]^2\, du\, dv, \quad x \in \Omega.$$

Тогда $G(a) = F(x)+F(y)+F(z)$, а условие $a \in \Phi$ разбивается на условие $x \in \Omega$ и аналогичные независимые условия для y и z, поэтому достаточно решить задачу вида

$$F(x) \longrightarrow \min, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

для каждой координаты в отдельности.

Введём множество допустимых вариаций

$$\Omega_0 = \Big\{h\colon D \to \mathbb{R} \;\Big|\; h \in C^1(D),\ h_{uv}, h_{vu} \in C(D),\ h|_\Gamma \equiv 0\Big\}.$$

Тогда $x + \alpha h \in \Omega$ для всех $x \in \Omega$, $h \in \Omega_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, при этом

$$F(x + \alpha h) = F(x) + 2\alpha\, l(x,h) + \alpha^2 d(h),$$

где

$$l(x,h) = \iint_D x_{uv} h_{uv} du\, dv, \quad d(h) = \iint_D h_{uv}^2 du\, dv.$$

Заметим, что $\quad d(h) \geqslant 0 \quad \forall\, h \in \Omega_0$.

ЛЕММА 1. *Функция $x_* \in \Omega$ является решением задачи* (6) *тогда и только тогда, когда*

$$l(x_*, h) = 0 \quad \forall\, h \in \Omega_0.$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть $x_* \in \Omega$ — решение (6). Тогда для $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, $h \in \Omega_0$ выполнено

$$0 \leqslant \frac{1}{\alpha}\big(F(x_* + \alpha h) - F(x_*)\big) = 2l(x_*, h) + \alpha\, d(H)$$

Устремив α к нулю, получим $l(x_*, h) \geqslant 0$. Но $-h \in \Omega_0$, поэтому аналогичным образом получаем $l(x_*, -h) \geqslant 0$, значит $l(x_*, h) = -l(x_*, -h) \leqslant 0$, то есть $l(x_*, h) = 0$.

Достаточность. Пусть $l(x_*, h) = 0 \quad \forall\, h \in \Omega_0$. Тогда для $\forall\, x \in \Omega$ будем иметь $h = x - x_* \in \Omega_0$, поэтому

$$F(x) = F(x_* + h) = F(x_*) + 2l(x_*, h) + d(h) = F(x_*) + d(h) \geqslant F(x_*).$$

Лемма доказана. □

Определим функцию $c^x\colon D \to \mathbb{R}$ по формуле, аналогичной (2):

$$\begin{aligned} c^x(u,v) = (1-u)x^0(0,v) + u\,x^0(1,v) + (1-v)x^0(u,0) + v\,x^0(u,1) - \\ - (1-u)(1-v)x^0(0,0) - (1-u)v\,x^0(0,1) - \\ - u(1-v)x^0(1,0) - uv\,x^0(1,1). \end{aligned} \tag{7}$$

Ясно, что $c^x|_\Gamma \equiv x^0$. Кроме того, из (4) следует, что

$$x^0(0,v),\ x^0(1,v),\ x^0(u,0),\ x^0(u,1)\ \in C^1([0,1]),$$

поэтому

$$c^x_{uv}, c^x_{vu}\ \in C(D).$$

ЛЕММА 2.

$$\iint_D c^x_{uv} h_{uv}\,du\,dv = 0 \quad \forall\, h \in \Omega_0.$$

Доказательство. Из (7) видно, что $c^x_{uv}(u,v) = f(u) + g(v)$, где f, g — некоторые функции класса $C([0,1])$. Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_D c^x_{uv} h_{uv}\,du\,dv = \iint_D \big(f(u)+g(v)\big)h_{uv}(u,v)du\,dv = \\ = \int_0^1 f(u)\left(\int_0^1 h_{uv}(u,v)dv\right)du + \int_0^1 g(v)\left(\int_0^1 h_{uv}(u,v)du\right)dv = \\ = \int_0^1 f(u)\big(h_u(u,1)-h_u(u,0)\big)du + \int_0^1 g(v)\big(h_v(1,v)-h_v(0,v)\big)dv = \\ = 0, \end{aligned}$$

так как $h(u,1)\equiv 0$, $h(u,0)\equiv 0$, $h(1,v)\equiv 0$ и $h(0,v)\equiv 0$. □

ЛЕММА 3. *Пусть* $f \in C^1(D)$ *и* $f_{uv}(u,v) \equiv 0$. *Тогда*

$$f(u,v) = f(u,0) + f(0,v) - f(0,0) \quad \forall\, u,v \in [0,1].$$

Доказательство. Используя формулу Нютона-Лейбица, получаем

$$f_u(u,v) - f_u(u,0) = \int_0^v f_{uv}(u,w)\,dw = 0.$$

Поэтому

$$f(u,v) - f(0,v) = \int_0^u f_u(t,v)\,dt = \int_0^u f_u(t,0)\,dt = f(u,0) - f(0,0),$$

что и требовалось. □

ЛЕММА 4. *Пусть* $x \in \Omega$ *и*

$$\iint_D x_{uv}\, h_{uv}\, du\, dv = 0 \quad \forall\, h \in \Omega_0.$$

Тогда $x \equiv c^x$.

Доказательство. Обозначим $h = x - c^x$. Так как $\bigl(x - c^x\bigr)\big|_\Gamma \equiv 0$, то $h \in \Omega_0$.

Используя лемму 2, получаем

$$\iint_D h_{uv}^2\, du\, dv = \iint_D \bigl(x_{uv} - c_{uv}^x\bigr)\, h_{uv}\, du\, dv = \\ = \iint_D x_{uv}\, h_{uv}\, du\, dv - \iint_D c_{uv}^x\, h_{uv}\, du\, dv = 0.$$

Значит, $h_{uv} \equiv 0$. По лемме 3

$$h(u,v) = h(u,0) + h(0,v) - h(0,0) \quad \forall\, u, v \in [0,1].$$

Условие $h \in \Omega_0$ приводит к тождеству $h \equiv 0$, которое равносильно требуемому. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть дана вектор-функция* $b\colon \Gamma \to \mathbb{R}^3$*, удовлетворяющая условиям* (4)*. Тогда единственным решением задачи* (5) *является вектор-функция* $c(u,v)$*, построенная по формуле* (2).

Доказательство. Из лемм 1, 2 и 4 следует, что единственным решением задачи (6) является функция вида (7). Решая задачу (6) для трёх координатных функций, получаем по формуле (7) функции c^x, c^y и c^z. Таким образом, единственным решением задачи (5) будет вектор-функция

$$c(u,v) = \bigl(c^x(u,v),\, c^y(u,v),\, c^z(u,v)\bigr).$$

Но, как нетрудно видеть, эта вектор-функция совпадает с вектор-функцией, получаемой по формуле (2). □

4°. Перейдём теперь к связи поверхностей Кунса с поверхностями Безье. Начнём с необходимых определений.

Базисным полиномом Бернштейна называется полином

$$p_{nk}(x) = C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k},$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$.

Кривой Безье, построенной по полюсам $Y_0,\dots,Y_n \in \mathbb{R}^3$, называется кривая, определяемая вектор-функцией

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\, Y_k, \quad x \in [0,1].$$

Поверхностью Безье, построенной по полюсам $\{Z_{ij}\} \subset \mathbb{R}^3$ ($i = 0,\dots,m$, $j = 0,\dots,n$), называется поверхность, задаваемая вектор-функцией

$$C(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{mi}(u)\, p_{nj}(v)\, Z_{ij}, \quad u \in [0,1],\ v \in [0,1].$$

Нам также потребуются следующие свойства базисных полиномов Бернштейна:

$$\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \tfrac{k}{n}\, p_{nk}(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Рассмотрим задачу построения билинейной поверхности Кунса в случае, когда граничные кривые являются кривыми Безье, причём противоположные кривые имеют одинаковое количество полюсов. Пусть вектор-функция $b\colon \Gamma \to \mathbb{R}^3$ задаёт граничные кривые, причём кривой $b(u,0)$ соответствуют полюса $\{Y_{i0}\}_{i=0}^{m}$, кривой $b(u,1)$ — полюса $\{Y_{in}\}_{i=0}^{m}$, кривой $b(0,v)$ — полюса $\{Y_{0j}\}_{j=0}^{n}$, а кривой $b(1,v)$ — полюса $\{Y_{mj}\}_{j=0}^{n}$. Обозначим через $c(u,v)$ вектор-функцию (2), определяющую поверхность Кунса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Билинейная поверхность Кунса, задаваемая вектор-функцией $c(u,v)$, совпадает с поверхностью Безье, построенной по полюсам $\{Z_{ij} \mid i \in 0:m,\ j \in 0:n\}$, где*

$$\begin{aligned} Z_{ij} = {}& \big(1 - \tfrac{i}{m}\big)Y_{0j} + \tfrac{i}{m}\, Y_{mj} + \big(1 - \tfrac{j}{n}\big)Y_{i0} + \tfrac{j}{n}\, Y_{in} - \\ & - \big(1 - \tfrac{i}{m}\big)\big(1 - \tfrac{j}{n}\big)Y_{00} - \big(1 - \tfrac{i}{m}\big)\tfrac{j}{n}\, Y_{0n} - \tfrac{i}{m}\big(1 - \tfrac{j}{n}\big)Y_{m0} - \tfrac{i}{m}\tfrac{j}{n}\, Y_{mn}. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $C\colon D \to \mathbb{R}^3$ — поверхность Безье, построенная по полюсам $\{Z_{ij}\}$:

$$C(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{mi}(u)\, p_{nj}(v)\, Z_{ij} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{m} \big(1 - \tfrac{i}{m}\big)\, p_{mi}(u)\right)\left(\sum_{j=0}^{n} p_{nj}(v)\, Y_{0j}\right) + \left(\sum_{i=0}^{m} \tfrac{i}{m}\, p_{mi}(u)\right)\left(\sum_{j=0}^{n} p_{nj}(v)\, Y_{mj}\right) +$$

$$+\left(\sum_{j=0}^{n}\left(1-\tfrac{j}{n}\right)p_{nj}(v)\right)\left(\sum_{i=0}^{m}p_{mi}(u)Y_{i0}\right)+\left(\sum_{j=0}^{n}\tfrac{j}{n}\,p_{nj}(v)\right)\left(\sum_{i=0}^{m}p_{mi}(u)Y_{in}\right)-$$
$$-\left(\sum_{i=0}^{m}\left(1-\tfrac{i}{m}\right)p_{mi}(u)\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\left(1-\tfrac{j}{n}\right)p_{nj}(v)\right)Y_{00}-$$
$$-\left(\sum_{i=0}^{m}\left(1-\tfrac{i}{m}\right)p_{mi}(u)\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\tfrac{j}{n}\,p_{nj}(v)\right)Y_{0n}-$$
$$-\left(\sum_{i=0}^{m}\tfrac{i}{m}\,p_{mi}(u)\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\left(1-\tfrac{j}{n}\right)p_{nj}(v)\right)Y_{m0}-$$
$$-\left(\sum_{i=0}^{m}\tfrac{i}{m}\,p_{mi}(u)\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\tfrac{j}{n}\,p_{nj}(v)\right)Y_{mn}\,.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части этого равенства. Используя (8) и (9), получаем

$$\sum_{i=0}^{m}\left(1-\tfrac{i}{m}\right)p_{mi}(u)=\sum_{i=0}^{m}p_{mi}(u)-\sum_{i=0}^{m}\tfrac{i}{m}\,p_{mi}(u)=1-u,$$

а так как $\left\{Y_{0j}\right\}$ являются полюсами для кривой Безье $b(0,v)$, то

$$\sum_{j=0}^{n}p_{nj}(v)\,Y_{0j}=b(0,v),$$

то есть первое слагаемое равно $(1-u)\,b(0,v)$. Аналогичным образом преобразуются остальные слагаемые. Если учесть, что

$$Y_{00}=b(0,0),\quad Y_{0n}=b(0,1),\quad Y_{m0}=b(1,0),\quad Y_{mn}=b(1,1),$$

то окончательно получим

$$C(u,v)=(1-u)\,b(0,v)+u\,b(1,v)+(1-v)\,b(u,0)+v\,b(u,1)-$$
$$-(1-u)(1-v)\,b(0,0)-(1-u)\,v\,b(0,1)-u(1-v)\,b(1,0)-u\,v\,b(1,1)=c(u,v),$$

что и требовалось. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. Academic Press, 2002.