

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ КРЕСТЕНСОНА*

М. С. Беспалов

bespalov@vlsu.ru

31 марта 2012 г.

В данном докладе конструкция для дискретных функций Уолша, приведённая в докладах В. Н. Малозёмова [1] и М. С. Беспалова [2], переносится из двоичного гармонического анализа в p -ичный. Базовые сведения приведены также в книге [3] и в статье [4], а новые результаты в статье [5].

1°. Двоичный гармонический анализ подразделяют на непрерывный, в рамках которого исследуются *функции Уолша* в нумерациях Пэли, Уолша и Качмажа (см. книгу [6]), и дискретный, где работают с *дискретными функциями Уолша* в нумерациях Пэли, Уолша и Адамара. Для дискретных функций Уолша наиболее востребована нумерация Адамара, приведённая в докладе [1].

Аналогом системы Уолша-Пэли в p -ичном гармоническом анализе служит система Крестенсона-Леви. А p -ичным аналогом дискретных функций Уолша-Пэли и Уолша-Адамара соответственно служат дискретные функции Крестенсона-Леви и Крестенсона-Кroneкера соответственно. В книге [3] другая терминология, там дискретные и “непрерывные” (относительно непрерывного аргумента) функции Крестенсона называются ВКФ (Виленкина-Крестенсона функциями) в нумерациях Пэли и Адамара соответственно.

2°. Каждая функция Уолша (за исключением $w_0(x) \equiv 1$) определяется как произведение функций Радемахера. А для функций Радемахера есть (см. книгу [6]) три разных определения, приводящие к построению разных теорий.

Определение $r_k(x) = \text{sign} \sin 2^{k+1}\pi x$ позволяет оставаться в классе регулярных функций, что важно в теории рядов Фурье.

Для прикладников удобнее определять функции Радемахера на полуинтервале $[0, 1)$ через начальную функцию $r_0(x) = 1$ при $x \in [0, 1/2)$, $r_0(x) = -1$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: <http://www.dha.spb.ru/>

Доклад подготовлен при поддержке РФФИ, проект 11-01-97512 р-центр-а, и в рамках проекта ДПННТ № 1.1348.2011.

при $x \in [1/2, 1)$. Функцию $r_0(x)$ продолжают с периодом 1 на полуось $[0, \infty)$ и задают остальные функции методом двоичного сжатия $r_k(x) = r_0(2^k x)$.

Если все двоично-рациональные точки полуинтервала $[0, 1)$ рассматривать как двойные, то от второго определения переходим к определению функций Радемахера (а следовательно и Уолша) на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$, что соответствует определению функций Уолша на двоичной группе Кантора.

3°. Наиболее приспособленным к p -ичному обобщению, которое первым проделал Леви [7], выглядит второй вариант определения функций Радемахера. Полагаем $\omega = \omega_p = \exp(\frac{2\pi i}{p})$ и определяем *обобщённую начальную функцию Радемахера*:

$$r_0(x) = \omega^k, \quad \text{если } x \in \Delta_1^k = \left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p} \right), \quad k \in 0 : p-1. \quad (1)$$

Функцию $r_0(x)$ продолжаем с периодом 1 на полуось $[0, \infty)$ и задаем остальные *обобщённые функции Радемахера* методом p -ичного сжатия $r_j(x) = r_{j-1}(px)$. Для обобщённых функций Радемахера применяется прежнее обозначение, так как при $p = 2$ определение (1) совпадает с определением функций Радемахера.

В статье [8] через p -ичное n -значное разложение числа $k \in 0 : p^n - 1$,

$$k = \sum_{j=1}^n k_j p^{j-1}, \quad \text{где } 0 \leq k_j \leq p-1, \quad (2)$$

вводятся *функции Крестенсона-Леви*

$$\psi_k(x) = \prod_{j=1}^n (r_{j-1}(x))^{k_j}. \quad (3)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (см. [6]). Система функций $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ составляет полную ортонормированную на $[0, 1)$ систему функций.

4°. При заданных p, n через разложение (2) чисел $k, m \in 0 : p^n - 1$ вычисляются значения *дискретных функций Крестенсона* двух основных нумераций

$$\varphi_m(k) = \prod_{j=1}^n \omega^{k_j m_j}, \quad \tau_m(k) = \prod_{j=1}^n \omega^{k_j m_{n-j+1}}, \quad \text{где } \omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}. \quad (4)$$

Фиксированное целое $p > 2$ определяет основание системы, а фиксированное натуральное n задаёт число аргументов p^n дискретной функции. Число n назовём *уровнем* дискретной функции и будем отмечать в фигурных скобках: если для отдельных значений дискретной функции, то после аргумента $\varphi_m(k)\{n\}$, $\tau_m(k)\{n\}$; а для всей функции в виде $\varphi_m\{n\}$, $\tau_m\{n\}$.

Первое знакомство с понятием функции обычно начинают с упоминания трёх способов задания функции: аналитического, графического и табличного. Более простым выглядит табличный способ задания дискретной функции, который при фиксированном порядке аргументов превращается в представление дискретной функции в виде вектора (например, векторы $\varphi_m\{n\}$, $\tau_m\{n\}$).

5°. С дискретными функциями будем работать как с векторами. Для дискретных функций Крестенсона u , v (фиксированного уровня) применяются операции сложения $u + v$ и покоординатного умножения $u \bullet v$, которая для векторов называется *умножением по Адамару*. Заметим, что (применяемое в книге [3]) отождествление функций Крестенсона и дискретных функций Крестенсона вызвано именно необходимостью применения для последних операции умножения (по Адамару).

Другой основной операцией над дискретными функциями Крестенсона, позволяющей от функций уровня m и n переходить к новому уровню $m + n$, служит операция *кронекедова произведения* (определение см. в докладе [2]) матриц (в нашем случае векторов) $u\{m\} \otimes v\{n\}$.

6°. Основным примером векторной формы записи дискретной функции Крестенсона служит следующая запись *дискретной экспоненциальной функции* (в [3] обозначена ДЭФ), где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$:

$$r = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}). \quad (5)$$

В обозначениях (4) эта функция равна $\varphi_1\{1\} = \tau_1\{1\}$. Степени (по Адамару) этой функции есть следующие ДЭФ:

$$r^{\bullet 2} = r \bullet r = (1, \omega^2, \omega^4, \dots, \omega^{2p-2}) = \varphi_2\{1\} = \tau_2\{1\},$$

и далее при $j < p$ имеем $r^{\bullet j} = \varphi_j\{1\} = \tau_j\{1\}$.

Заметим, что строки матрицы *дискретного преобразования Фурье* (ДПФ) $F_p = (\omega^{kj})_{k,j=0}^{p-1}$ состоят из всех степеней ДЭФ в естественном порядке

$$r^{\bullet 0}, r, r^{\bullet 2}, \dots, r^{\bullet(p-1)}.$$

7°. Разложению (2) соответствует *простой p -ичный (n -значный) код* числа $k \in 0 : p^n - 1$ (обозначение $\tilde{k}$ применяем при фиксированном n)

$$\tilde{k} = k_{\{n\}} = (k_n k_{n-1} \dots k_1).$$

Если опустить скобки, то это запись числа в p -ичной системе счисления.

Для того же числа укажем $(n+1)$ -значный простой код

$$k_{\{n+1\}} = (0 k_n k_{n-1} \dots k_1).$$

По простому коду $\tilde{k}$ получаем *обратный код* (он же *реверс* кода, см. [1])

$$\text{rev } \tilde{k} = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n),$$

с помощью которого вводится (см. [1]) *перестановка реверс* на множестве чисел $Z(p, n) = \{0, 1, 2, \dots, p^n - 1\}$:

$$\text{rev}_n(k) = \text{rev}(k) = \sum_{j=1}^n k_{n-j+1} p^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} k_{n-j} p^j. \quad (6)$$

ЛЕММА 1. Если $m < p^n$, то $\text{rev}_{n+1}(m) = p \cdot \text{rev}_n(m)$.

Доказательство. Так как $\text{rev } m_{\{n+1\}} = (m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n \ 0)$, то согласно (6) $\text{rev}_{n+1}(m) = 0 + \sum_{j=1}^n m_{n+1-j} p^j = p \sum_{j=1}^n m_{n-j+1} p^{j-1}$. $\square$

8°. При фиксированном n через скалярное произведение кодов длины n над кольцом $\mathbb{Z}_p$ введём скалярное произведение элементов множества $Z(p, n)$:

$$(m, k) = (m, k)_n = (\tilde{m}, \tilde{k}) = \sum_{j=1}^n m_j k_j \pmod{p}.$$

Основную операцию *сложения по модулю p* в кольце $\mathbb{Z}_p$ обозначим $\dot{+}$. Легко проверяется следующая

ЛЕММА 2. Введённая операция скалярного произведения удовлетворяет основным свойствам скалярного произведения: симметрия, $(m, k) = (k, m)$, и линейность, $(m, \alpha k \dot{+} \beta l) = \alpha(m, k) \dot{+} \beta(m, l)$.

При фиксированном p и заданном уровне n определение (4) дискретных функций Крестенсона перепишем в виде (для $m, k \in Z(p, n)$)

$$\varphi_m(k) = \omega^{(m, k)}, \quad \tau_m(k) = \omega^{(\text{rev}(m), k)}. \quad (7)$$

9°. Рассмотрим поведение функций φ_m при изменении уровня. Тривиально доказывается следующая

ЛЕММА 3. Если $0 \leq m, k < p^n$, то $(m, k)_n = (m, k)_{n+1} = (m, k)_{n+2} = \dots$, $(m, k + jp^n)_{n+1} = (m, k)_n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $0 \leq m, k < p^n$, то

$$\begin{aligned} \varphi_m(k)\{n\} &= \varphi_m(k)\{n+1\} = \varphi_m(k)\{n+2\} = \dots, \\ \varphi_m\{n+1\} &= \varphi_0\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}. \end{aligned}$$

В пояснении нуждается только вторая формула. При сквозной нумерации чисел множества $Z(p, n+1)$ индексами $k + jp^n$ при каждом $j \in 0 : p-1$ пробегаем все p^n значений множества $Z(p, n)$, после чего переходим к $j+1$. Согласно (7) и лемме 3

$$\varphi_m(k + jp^n)\{n+1\} = \omega^{(m, k+jp^n)_{n+1}} = \omega^{(m, k)_n} = \varphi_m(k)\{n\}.$$

Получаем блочный вид вектора $\varphi_m\{n+1\}$, что перепишем с помощью символа кронекерова произведения

$$\varphi_m\{n+1\} = (\varphi_m \varphi_m \dots \varphi_m) = \varphi_0\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $0 \leq m < p^n$, $0 \leq j < p$, то

$$\varphi_{m+jp^n}\{n+1\} = \varphi_j\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}.$$

Доказательство. Если $0 \leq m, k < p^n$, $0 \leq j, l < p$, то в обозначениях $M = m + jp^n$, $K = k + lp^n$ имеем

$$(M, K)_{n+1} = jl \dot{+} (m, k)_n, \quad \varphi_M(K)\{n+1\} = \omega^{jl} \varphi_m(k)\{n\}.$$

Так же как в следствии получаем

$$\varphi_M\{n+1\} = (\varphi_m \omega^j \varphi_m \dots \omega^{(p-1)j} \varphi_m) = \varphi_j\{1\} \otimes \varphi_m\{n\}. \quad \square$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовём матрицей дискретного преобразования Крестенсона-Кронекера (уровня n) кронекерову степень матрицы дискретного преобразования Фурье, то есть матрицу $F_p^{(n)} = F_p \otimes F_p^{(n-1)}$.

ЛЕММА 4. Строка с номером $m + jp^{n-1}$, где $0 \leq m < p^{n-1}$, $0 \leq j < p$, матрицы $A \otimes B$ имеет вид $A_j \otimes B_m$, выраженный через строки исходных матриц с указанными индексами.

Из этой леммы, которая легко проверяется, и предложения 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Строки матрицы $F_p^{(n)}$ есть естественно упорядоченный полный набор дискретных функций Крестенсона $\varphi_m\{n\}$.

10°. Согласно следствию 2 и определению 1 функции (4), упорядоченные как $\varphi_m\{n\}$, назовём *дискретными функциями Крестенсона-Кроненкера*.

Функции (4), упорядоченные как $\tau_m\{n\}$, назовём *дискретными функциями Крестенсона-Леви*, в соответствии со следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Нумерация (4) дискретных функций τ_m совпадает с нумерацией (3) функций Крестенсона-Леви ψ_m непрерывного аргумента:

$$\psi_m(x) = \tau_m(k) \quad \text{при } x \in \Delta_n^k = \left[\frac{k}{p^n}, \frac{k+1}{p^n} \right). \quad (8)$$

Причём построенная по такому правилу ψ_m не зависит от выбора уровня n (такого, что $m < p^n$) дискретной функции Крестенсона τ_m .

Доказательство. Во-первых, $\tau_0(k) = 1$ для всех k независимо от уровня. Поэтому и по формуле (8) получаем $\psi_0(x) \equiv 1$.

Для произвольного натурального m возьмём (и зафиксируем) любое n такое, что $m < p^n$. Произвольное $x \in [0, 1)$ разложим в виде $x = \epsilon + \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{p^j}$, где $0 \leq \epsilon < \frac{1}{p^n}$. По формуле (1) имеем $r_1(x) = r_0(px) = \omega^{x^2}$, так как $px \in \Delta_1^{x^2}$; аналогично $r_{j-1}(x) = \omega^{x^j}$. Используя разложение (2), рассмотрим

$$\psi_m(x) = \prod_{j=1}^n (r_{j-1}(x))^{m_j} = \prod_{j=1}^n \omega^{x_j m_j} = \omega^{\sum_{j=1}^n x_j m_j}.$$

Если $x \in \Delta_n^k$, то $x = \frac{k}{p^n} + \epsilon$, где $0 \leq \epsilon < \frac{1}{p^n}$. Так как простой код числа $k = \sum_{j=1}^n k_j p^{j-1}$ равен $\tilde{k} = (k_n \ k_{n-1} \dots k_1)$, то $x = \epsilon + \sum_{j=1}^n \frac{k_{n-j+1}}{p^j}$. Поэтому $x_j = k_{n-j+1}$, $\text{rev } \tilde{k} = (x_n \ x_{n-1} \dots x_1)$ и при $x \in \Delta_n^k$

$$\psi_m(x) = \omega^{(\text{rev}(k), m)} = \tau_m(k) \{n\}. \quad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $m < p^n$, то $\tau_m\{n+1\} = \tau_m\{n\} \otimes \tau_0\{1\}$.

Доказательство. Так как $\Delta_n^k = \cup_{s=0}^{p-1} \Delta_{n+1}^{s+kp}$, то при сквозной нумерации индексами $s+kp$ от 0 до $p^{n+1}-1$ значения функции $\psi_m(x)$ на интервалах Δ_{n+1}^{s+kp} при фиксации k повторяются p раз равными $\tau_m(k)\{n\}$. Этот факт и записан с помощью символа кронекерова произведения и вектора $\tau_0 = (1 \ 1 \ 1 \dots 1)$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $m < p^n$, то $\tau_{m+jp^n}\{n+1\} = \tau_m\{n\} \otimes \tau_j\{1\}$.

Доказательство. При $x \in \Delta_{n+1}^{s+kp}$ как и выше имеем

$$\begin{aligned} \tau_{m+jp^n}(s+kp)\{n+1\} &= \psi_{m+jp^n}(x) = \psi_m(x) \cdot (r_n(x))^j = \tau_m(k)\{n\} \cdot \omega^{sj} = \\ &= \tau_m(k) \cdot \tau_j(s)\{1\}. \end{aligned} \quad \square$$

11°. Формулы (4) или (7) служат определением дискретных функций Крестенсона в двух основных нумерациях. Предложим определение этих функций в виде векторов (то есть табличное задание дискретной функции) не привязанное к нумерации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дискретной функцией Крестенсона уровня n назовём кронекерово произведение в количестве n сомножителей векторов вида $r^{\bullet j}$, то есть степеней по Адамару дискретной экспоненциальной функции (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При фиксированных p и n (основании и уровня) дискретная функция Крестенсона Ψ однозначно задаётся своими n значениями на множестве аргументов $A = \{1, p, p^2, \dots, p^{n-1}\}$. Основное множество аргументов A допускает замену на другое множество аргументов A' . Если число p простое, то вместо каждого аргумента p^j можно при формировании A' брать любое число из множества $\{p^j, p^j + 1, \dots, p^{j+1} - 1\}$.

Доказательство. По определению 2 произвольная дискретная функция Крестенсона уровня n имеет вид

$$\Psi = r^{\bullet j_{n-1}} \otimes r^{\bullet j_{n-2}} \otimes \dots \otimes r^{\bullet j_1} \otimes r^{\bullet j_0}. \quad (9)$$

Так как начальное значение любой дискретной функции Крестенсона (нулевая координата) равно 1, то подвектор вектора Ψ , состоящий из его первых p координат, есть вектор $r^{\bullet j_0}$, координата с номером 1 которого равна ω^{j_0} . То есть $\Psi(1) = \omega^{j_0}$. В случае множества A' из простоты p вытекает, что все координаты вектора $r^{\bullet j_0}$ различны, и j_0 восстанавливается по номеру координаты.

Аналогично устанавливается, что подвектор вектора Ψ , состоящий из его первых p^2 координат, есть вектор $r^{\bullet j_1} \otimes r^{\bullet j_0}$, координата с номером p которого равна ω^{j_1} . То есть $\Psi(p) = \omega^{j_1}$. Зная j_0 и номер следующей координаты во множестве A' , однозначно вычисляется j_1 .

Этот процесс продолжается аналогично. В основном случае $\Psi(p^2) = \omega^{j_2}$. И так далее, $\Psi(p^k) = \omega^{j_k}$. В случае множества A' этот процесс несколько усложняется. $\square$

12°. Комплексно-сопряжённой к дискретной экспоненциальной функции также будет ДЭФ: $\overline{r^{\bullet j}} = r^{\bullet(p-j)}$. Отсюда вытекает

ЛЕММА 5. Комплексно-сопряжённая к дискретной функции Крестенсона будет тоже дискретной функцией Крестенсона.

При цифровой обработке сигналов с помощью ортогональных преобразований используется следующая схема, которую запишем в матричном виде.

По исходному сигналу x (в виде столбца длины N) спектральные характеристики y вычисляются применением *оператора анализа* по формуле

$$y = F^* \cdot x.$$

Восстанавливается сигнал с помощью *оператора синтеза* по формуле

$$x = \frac{1}{N} F \cdot y.$$

В качестве F берут матрицу дискретного преобразования Фурье порядка N , или дискретного преобразования Крестенсона (в нумерации Кронекера или Леви) порядка N , или какого-либо другого ортогонального преобразования.

Введем понятие дискретного преобразования Крестенсона произвольной нумерации. При этом потребуем, чтобы оба оператора анализа и синтеза выполнялись относительно дискретных функций Крестенсона. Соответствующую матрицу преобразования назовём *K-матрицей*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовём *K-матрицей* уровня n такую матрицу, что: все её строки есть различные дискретные функции Крестенсона уровня n ; а также все её столбцы есть различные дискретные функции Крестенсона уровня n .

ТЕОРЕМА 1. Если p простое, то между множествами невырожденных над полем $\mathbb{Z}_p$ матриц $B = (b_{lj})$ порядка n и *K-матриц* $V = (v_{rs})$ уровня n существует взаимно-однозначно соответствует по правилу $v_{r^l p^j} = \omega^{b_{lj}}$, где $l, j \in 0 : n - 1$. Остальные элементы матрицы V восстанавливаются однозначно.

Доказательство. Для матриц V, B той же буквой с нижним индексом будем обозначать строку матрицы с указанным номером.

По произвольному ненулевому вектору $B_0 = (b_{00} \ b_{01} \ \dots \ b_{0n-1})$ (в качестве начальной строки B) соответствием $v_{1p^j} = \omega^{b_{0j}}$, где $j \in 0 : n - 1$, однозначно определяем координаты строки V_1 с номерами, взятыми из выборки $\alpha = \{1, p, p^2, \dots, p^{n-1}\}$. По предложению 4 восстанавливаем всю строку V_1 .

Тогда следующие $(p - 2)$ строки матрицы V получаются возведением в степень (по Адамару) этой строки: $V_l = V_1^{\bullet l}$, где $2 \leq l < p$.

Опишем индуктивный переход. Предположим, что построены первые p^{k-1} строк матрицы V по первым $(k - 1)$ строкам матрицы B .

Строка V_{p^k} строится по предложению 4 через свои координаты с номерами из выборки α , которые в свою очередь вычислены через строку B_k по правилу $v_{p^k p^j} = \omega^{b_{kj}}$.

Линейная независимость строк $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k$ гарантирует то, что среди ранее построенных строк $V_0, V_1, \dots, V_{p^{k-1}-1}$ не встречается строка V_{p^k} .

Строка с номером $sp^k + l$, где $l < p^k$, строится по правилу линейной перестановки

$$V_{sp^k+l} = V_{p^k}^{\bullet s} \bullet V_l.$$

Также из линейной независимости выводится, что и эта произвольная строка не могла встретиться среди ранее построенных строк.

Рассмотренный процесс построения обратим. Для произвольной K -матрицы с помощью выборки α выделяется её подматрица, по которой легко восстанавливается матрица B .

В заключении проверяется, что каждый столбец таким образом построенной матрицы есть дискретная функция Крестенсона. $\square$

В этом доказательстве приведена общая схема, но отдельные детали не подробно обоснованы. В [5] предложено другое доказательство этой теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Дискретные функции Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 марта 2011 г. (<http://dha.spb.ru/rep11.shtml#0312>)
2. Беспалов М. С. *Спектральное разложение операторов дискретного преобразования Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 8 октября 2011 г. (<http://dha.spb.ru/rep11.shtml#1008>)
3. Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах*. М.: Советское радио, 1975.
4. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Обобщённые вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина-Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 1. С. 111–157.
5. Беспалов М. С. *Дискретное преобразование Крестенсона* // Проблемы передачи инф. 2010. Т. 46. Вып. 4. С. 91–115.
6. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения*. М.: Наука, 1987.
7. Levy P. *Sur une generalisation des fonctions orthogonales de M. Rademacher* // Comment. math. helv. 1944. V. 16. P. 146–152.
8. Chrestenson H. E. *A class of generalized Walsh functions* // Pacific. J. Math. 1955. V. 5. Ch. 1. P. 17–32.