ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ, ГЕНЕРИРУЮЩИХ ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ УОЛША*

М. С. Беспалов

bespalov@vlsu.ru

21 ноября 2013 г.

1°. В докладе В. Н. Малозёмова [1] приведены определения и основные свойства *дискретных функций Уолша в нумерации Адамара*. Они связаны с *матрицами Сильвестра-Адамара*

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_n = \begin{pmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{при } n = 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Матрицы (1) введены Дж. Сильвестром [2], получили популярность как *матрицы дискретного преобразования Уолша в нумерации Адамара* и служат простым частным случаем матриц Адамара, о которых подробнее см. в книге [3].

Рекуррентную формулу (1) можно переписать через *кронекерово произведение* $H_n = H \otimes H_{n-1}$ или как *кронекерову степень* $H_n = H^{(n)}$, где $H = H_1$.

Таблично заданная дискретная функция представляет собой вектор своих значений. В докладе в качестве упорядоченного набора дискретных функций Уолша *уровня* n будем рассматривать набор вектор-столбцов матрицы H_n.

Решается задача — для любого n построить оператор C_n, орбитой которого служит данный упорядоченный набор.

2°. Данная задача появилась в результате ознакомления с рядом публикаций докладов семинара [4–8], в которых говорится о циклическом свойстве фреймов. Как вытекает из доклада [9], матрица конечного фрейма получается из невырожденной матрицы удалением строк. Удалённые строки составляют матрицу дополнительного фрейма. Поэтому изучение циклических свойств

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

фреймов сводится к изучению аналогичных свойств столбцов невырожденной матрицы.

Общая задача — для произвольной невырожденной матрицы A построить *циклический оператор* C, орбитой которого служит упорядоченный набор столбцов матрицы A. Если $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ есть упорядоченный набор столбцов матрицы A, то

$$Cf_{j-1} = f_j \quad \text{при} \;\; j = 1, 2, \ldots, N-1 \;, \quad Cf_{N-1} = f_0. \tag{2}$$

В простейшем случае единичной матрицы E в качестве A матрицей данного циклического оператора с орбитой в виде *стандартного базиса* служит перестановочная матрица с единицами на диагонали под главной и в правом верхнем углу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Если единицу в правом верхнем углу считать тоже диагональю параллельной главной, то последовательные степени матрицы P получаются смещением этих двух диагоналей параллельно главной вниз и влево.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любой невырожденной матрицы A циклический оператор для её столбцов имеет вид, выраженный через матрицу* (3)

$$C = A \cdot P \cdot A^{-1}. \tag{4}$$

Для степеней этого оператора справедлива формула

$$C^k = A \cdot P^k \cdot A^{-1}.$$

Доказательство. Как отмечено в [10], перемещение начального столбца матрицы A в конец записывается в виде умножения на перестановочную матрицу (3) справа: AP. Поэтому действие оператора C на столбцы матрицы A по правилу (2) в матричном виде запишем $C \cdot A = A \cdot P$, что эквивалентно (4). Из этого соотношения выводится формула для степеней C^k. □

3°. В докладе [1] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Нормированная матрица Адамара-Сильвестра $\frac{1}{\sqrt{N}} H_n$ ортогональна. А именно (при $N = 2^n$):*

$$(H_n)^2 = N \cdot E.$$

Столбцы h_j симметричной матрицы H_n ортогональны. А именно, (здесь скалярное произведение столбцов записано в матричном виде)

$$h_j^T \cdot h_k = N \cdot \delta_{jk}, \quad \text{где } \delta_{jk} \text{ — символ Кронекера.}$$

Набор столбцов $\{h_j\}_{j=0}^{N-1}$ матрицы H_n составляет ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^N$.

По формуле (1) легко получаем представление начального столбца h_0 и конечной строки h_{N-1}^T матрицы H_n в виде кронекеровой степени:

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{(n)}, \qquad h_{N-1}^T = (1,\, -1)^{(n)}. \tag{5}$$

ЛЕММА 1. *Оператор с матрицей*

$$A_n = \frac{1}{N} \cdot h_0 \cdot h_{N-1}^T = \frac{1}{2^n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{(n)} \cdot (1,\, -1)^{(n)} = A_1^{(n)}, \quad \text{где } A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

действует по правилу

$$A_n \cdot h_j = 0 \ \text{ при } \ j \in 0 : N-2, \qquad A_n \cdot h_{N-1} = h_0.$$

Доказательство. По предложению 2 и ассоциативности умножения матриц имеем

$$A_n \cdot h_j = \frac{1}{N} \cdot h_0 \cdot h_{N-1}^T \cdot h_j = h_0 \cdot \delta_{N-1\, j}. \qquad \square$$

4°. Легко проверить, что

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

есть матрица циклического оператора для столбцов матрицы Адамара-Сильвестра H_1. Орбитой оператора C_1 служат столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ТЕОРЕМА 1. *Если C_n есть матрица циклического оператора для столбцов матрицы Адамара-Сильвестра H_n, то циклический оператор для столбцов матрицы Адамара-Сильвестра H_{n+1} имеет вид блочной матрицы*

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} C_n & 0 \\ 0 & B_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $B_n = C_n - 2A_n$ и матрицы справа вычислены по формулам (6), (7) и (8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если формально обозначим $C_0 = -B_0 = (1)$, то формула (7) составляет базу индукции.

Обозначим f_j столбцы матрицы H_n. Тогда столбцы h_j матрицы H_{n+1} выражаются через них согласно (1):

$$h_j = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes f_j, \quad h_{j+2^n} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \otimes f_j, \quad j \in 0 : 2^n - 1.$$

По индукционному предположению и лемме 1 при $j \in 0 : 2^n - 2$ имеем

$$B_n \cdot f_j = C_n \cdot f_j - 2A_n \cdot f_j = C_n \cdot f_j - 0 = f_{j+1},$$
$$C_{n+1} \cdot h_j = \begin{pmatrix}C_n & 0\\ 0 & B_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}f_j\\f_j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_n \cdot f_j\\ B_n \cdot f_j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_{j+1}\\f_{j+1}\end{pmatrix} = h_{j+1},$$
$$C_{n+1} \cdot h_{j+2^n} = \begin{pmatrix}C_n & 0\\ 0 & B_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}f_j\\-f_j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \otimes f_{j+1} = h_{j+2^n+1}.$$

А для последнего столбца матрицы H_n применение леммы 1 даёт

$$B_n \cdot f_{2^n-1} = C_n \cdot f_{2^n-1} - 2A_n \cdot f_{2^n-1} = f_0 - 2f_0.$$

Поэтому

$$C_{n+1} \cdot h_{2^n-1} = \begin{pmatrix}C_n & 0\\ 0 & B_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}f_{2^n-1}\\f_{2^n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_0\\-f_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \otimes f_0 = h_{2^n},$$

$$C_{n+1} \cdot h_{2^{n+1}-1} = \begin{pmatrix}C_n \cdot f_{2^n-1}\\ -B_n \cdot f_{2^n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_0\\f_0\end{pmatrix} = h_0. \qquad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Циклический оператор для столбцов матрицы H_n имеет вид блочно-диагональной матрицы*

$$C_n = \operatorname{diag}(C_0, B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}). \tag{9}$$

Приведём вид первых блоков: $B_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,

$$B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}, \; B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1\end{pmatrix}.$$

5°. Предложим алгоритм быстрого вычисления степеней матрицы циклического оператора C_n.

ЛЕММА 2. *Если обозначим P_n матрицу вида* (3) *порядка 2^n, то*

$$(P_n)^2 = P_{n-1} \otimes E, \quad (P_n)^{2s} = P_{n-1}^s \otimes E, \quad (P_n)^{2^k} = P_{n-k} \otimes E^{(k)}, \quad k \in 1 : n-1,$$

где E — единичная матрица второго порядка.

Доказательство. Матрицу

$$(P_n)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

разобьём на квадратные блоки порядка 2 и получим

$$(P_n)^2 = P_{n-1} \otimes E. \tag{10}$$

Формула $(P_n)^{2s} = P_{n-1}^s \otimes E$ для произвольной чётной степени доказывается аналогично, ориентируясь на внешний вид полученной перестановочной матрицы.

Общий порядок вывода следующей формулы продемонстрируем для простейшего случая, который можно было бы получить по предыдущей формуле. По формуле (10) имеем

$$(P_n^2)^2 = (P_{n-1} \otimes E) \cdot (P_{n-1} \otimes E).$$

Применим известное свойство [11] кронекерова произведения (для матриц, допускающих, по размерам, соответствующие произведения)

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C) \otimes (B \cdot D) \tag{11}$$

и получим выражение, к которому снова применим (10):

$$P_n^{2^2} = P_{n-1}^2 \otimes E^2 = P_{n-2} \otimes E \otimes E = P_{n-2} \otimes E^{(2)}.$$

Аналогично совершаем индукционный переход:

$$(P_n^{2^{k-1}})^2 = (P_{n-k+1} \otimes E^{(k-1)})^2 = (P_{n-k} \otimes E) \otimes (E^{(k-1)})^2 = P_{n-k} \otimes E^{(k)}. \quad \square$$

Отметим, что формула (4) предложения 1 в случае циклического оператора для столбцов матрицы Адамара-Сильвестра приобретает вид

$$C_n = \frac{1}{2^n} H_n \cdot P_n \cdot H_n. \tag{12}$$

ТЕОРЕМА 2. *Чётная степень матрицы* (8) *или* (12) *выражается через меньшую степень этой матрицы предыдущего уровня рекуррентной формулой*

$$(C_n)^{2k} = (C_{n-1})^k \otimes E, \tag{13}$$

где E *— единичная матрица второго порядка.*

Доказательство. Применим предложение 1 к (12):

$$(C_n)^k = \frac{1}{2^n} H_n \cdot (P_n)^k \cdot H_n. \tag{14}$$

В случае чётной степени применим к выражению 14 лемму 2, формулу (11) и снова (14). Получим

$$\begin{aligned} 2^n \cdot (C_n)^{2k} &= H_n \cdot (P_n)^{2k} \cdot H_n = (H_{n-1} \otimes H) \cdot ((P_{n-1})^k \otimes E) \cdot (H_{n-1} \otimes H) = \\ &= (H_{n-1} \cdot (P_{n-1})^k \cdot H_{n-1}) \otimes (H \cdot E \cdot H) = 2^{n-1} \cdot (C_{n-1})^k \otimes (2 \cdot E). \end{aligned}$$

Остаётся сократить на числовой множитель 2^n. □

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если возводим в степень двойки, то*

$$(C_n)^{2^s} = C_{n-s} \otimes E^{(s)} \qquad (s \leqslant n),$$

в частности, $(C_n)^{2^{n-1}} = C_1 \otimes E^{(n-1)}$, $(C_n)^{2^n} = E^{(n)}$. *Относительно блочно-диагонального вида* (9) *получим*

$$(C_n)^2 = \mathrm{diag}(E, B_0 \otimes E, B_1 \otimes E, \ldots, B_{n-2} \otimes E),$$

при этом $(B_k)^2 = B_{k-1} \otimes E$, $(B_k)^{2^{k+1}} = E^{(k)}$.

Это следствие рассматриваем как быстрый алгоритм вычисления степени матрицы C_n (или B_n). Для этого раскладываем показатель степени в двоичной системе счисления и перемножаем матрицы соответствующих степеней двойки, которые имеют более простой вид.

6°. Продолжим изучение свойств циклического оператора C_n. *Характеристическим многочленом* для матрицы B называется [11] определитель матрицы $xE - B$. *След матрицы* равен сумме диагональных элементов.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого натурального n след матриц B_n и C_n равен* 0, *а для определителей справедливы формулы*

$$|B_n| = 1, \quad |C_n| = -1;$$

характеристические многочлены матриц равны ($N = 2^n$):

$$x^N + 1 \quad \text{для матрицы } B_n, \quad x^N - 1 \quad \text{для матрицы } C_n.$$

Существует унитарная матрица U_n такая, что (здесь $\omega = e^{\frac{\pi i}{N}}$, $N = 2^n$)

$$B_n = U_n^* \cdot D_n \cdot U_n, \quad \text{где } D_n = \mathrm{diag}(\omega^1, \omega^3, \omega^5, \ldots, \omega^{2N-1}).$$

Кроме того, существует унитарная матрица U, имеющая следующий блочно-диагональный вид $U = \mathrm{diag}(E, U_1, \ldots, U_{n-1})$, такая, что

$$C_n = U^* \cdot D_n \cdot U,$$

где

$$D_n = \mathrm{diag}(1, \omega^N, \omega^{N/2}, \omega^{3N/2}, \omega^{N/4}, \omega^{3N/4}, \omega^{5N/4}, \omega^{7N/4}, \ldots, \omega^2, \omega^6, \omega^{10}, \ldots, \omega^{2N-2}),$$

то есть на диагонали стоят значения $1, \omega^2, \omega^4, \omega^6, \ldots, \omega^{2N-2}$ в соответствующем порядке.

Доказательство. Очевидно, что $\mathrm{Tr}\, C_1 = 0$, $\mathrm{Tr}\, B_1 = 0$, $\mathrm{Tr}\, A_1 = 0$. Отсюда для кронекеровой степени $\mathrm{Tr}\, A_n = 0$. Если $\mathrm{Tr}\, C_{n-1} = 0$, $\mathrm{Tr}\, B_{n-1} = 0$, то по формуле (8) и $\mathrm{Tr}\, C_n = 0$, а далее $\mathrm{Tr}\, B_n = 0$.

Рассмотрим мономиальную матрицу M, которая получается из матрицы P вида (3) заменой единицы, стоящей в правом верхнем углу, на -1. Класс *мономиальных матриц* включает в себя класс перестановочных матриц. По определению [3] любая мономиальная матрица получается из перестановочной заменой какого-то количества элементов, равных 1, на -1. По той же схеме, как была получена формула (12), получаем выражение для матрицы B_n:

$$B_n = \frac{1}{2^n} H_n \cdot M \cdot H_n.$$

Очевидно, что как определитель, так и характеристический многочлен матриц P вида (3) и M, равны соответственно $|P| = -1$, $|M| = 1$, $x^N - 1$ и $x^N + 1$.

В [11] отмечено, что при преобразовании (4) с унитарной матрицей A определитель и характеристический многочлен не меняются. Поэтому $|C_n| = -1$, $|B_n| = 1$ и характеристические многочлены имеют вид $x^N - 1$ для C_n и $x^N + 1$ для B_n.

Характеристические многочлены в поле комплексных чисел раскладываются на произведение одночленов, откуда и вычисляем собственные числа преобразований. По общему правилу диагонализации оператора получаем диагональную форму операторов C_n и B_n, включающую некую унитарную матрицу. Вид унитарной матрицы для C_n уточняется, исходя из блочно-диагонального структуры C_n. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Дискретные функции Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 марта 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0312`)

2. Sylvester J.J. Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous simg-successions, and tessalated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers // Phil. Mag. 1867. V. 34. P. 461–475.

3. Холл М. *Комбинаторика.* М.: Мир, 1970.

4. Малозёмов В. Н. *Циклические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 января 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0121`)

5. Малозёмов В. Н., Соловьева Н. А. *Циклическое свойство фрейма Мерседес-Бенц* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 сентября 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0912`)

6. Истомина М. Н., Певный А. Б. *Система Мерседес-Бенц как орбита циклических групп* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 декабря 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#1212`)

7. Дурягин А. М., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Циклическое свойство вещественных гармонических фреймов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 13 февраля 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0213`)

8. Юркина М. Н. *Циклические фреймы Парсеваля* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 20 октября 2012 г. (`http://dha.spb.ru/reps12.shtml#1020`)

9. Истомина М. Н., Максименко В. В., Певный А. Б. *Дополнительные жесткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 апреля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0401`)

10. Малозёмов В. Н. *Линейная алгебра без определителей. Квадратичная форма.* СПб.: Изд-во С.-Петрерб. ун-та, 1997.

11. Маркус М., Минк Х. *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* М.: Наука, 1972.