ОДНА МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ДЕЛЬСАРТА ДЛЯ ОЦЕНКИ КОНТАКТНЫХ ЧИСЕЛ*

М. Н. Истомина — istomina@syktsu.ru

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

4 июня 2011 г.

1°. Введение. Контактным числом M_n пространства $\mathbb{R}^n$ называется максимальное число шаров радиуса $R = 1$ с непересекающимися внутренностями, касающимися одного такого же шара. Точные значения M_n известны только для размерностей $n = 2$, 3, 4, 8 и 24:

$$M_2 = 6,\ M_3 = 12,\ M_4 = 24,\ M_8 = 240,\ M_{24} = 196560.$$

Для остальных n известны только оценки чисел M_n, см., например, таблицу таких оценок в книге [3], с. 42.

Пусть $x \cdot y$ — обычное скалярное произведение векторов x, $y \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ — норма вектора x.

Нетрудно показать, что M_n равно максимальной мощности сферического $\frac{1}{2}$-кода. Множество $C = \{x_1, \ldots, x_M\}$ на единичной сфере S^{n-1} называется $\frac{1}{2}$-кодом, если $x_i \cdot x_j \leqslant \frac{1}{2}$ при $i \neq j$.

Итак, M_n равно максимальному M, для которого существует $\frac{1}{2}$-код из M векторов.

2°. Пусть $C = \{x_1, \ldots, x_M\}$ — сферический $\frac{1}{2}$-код. Обозначим через $K(t)$ количество упорядоченных пар (x_i, x_j), для которых $x_i \cdot x_j = t$. Введём функцию

$$\alpha_C(t) = \frac{1}{M} K(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Она обладает свойствами

$$\alpha_C(t) = 0 \text{ при } t \in (\tfrac{1}{2},\ 1); \qquad \alpha_C(1) = 1; \tag{1}$$

$$\sum_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \alpha_C(t) = \frac{M^2}{M} = M. \tag{2}$$

Ещё одно свойство $\alpha_C(t)$ связано с полиномами Гегенбауэра. Полином Гегенбауэра $G_k^{(n)}(t)$ имеет степень k и нормирован условием $G_k^{(n)}(1) = 1$; система $\bigl\{G_k^{(n)}\bigr\}_{k=0}^{\infty}$ ортогональна на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-t^2)^{(n-3)/2}$. Для любых точек $x_1,\ \ldots,\ x_M \in S^{n-1}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,\, j=1}^{M} G_k^{(n)}(x_i \cdot x_j) \geqslant 0, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что

$$M \sum_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \alpha_C(t)\, G_k^{(n)}(t) = \sum_{i,\, j=1}^{M} G_k^{(n)}(x_i \cdot x_j), \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots.$$

Использовав (1), получим неравенство

$$-\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha_C(t)\, G_k^{(n)}(t) \leqslant 1, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots.$$

3°. Оценка Дельсарта для количества элементов $\frac{1}{2}$-кода. Через C будем обозначать произвольный $\frac{1}{2}$-код на сфере S^{n-1}, $|C|$ — количество элементов этого кода. Введём обозначение

$$L(\alpha_C) = \sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha_C(t).$$

Согласно (1) и (2) справедливо равенство $|C| = 1 + L(\alpha_C)$. Мы хотим, чтобы $|C|$ было как можно больше. В связи с этим выберем натуральное число d и рассмотрим «экстремальную задачу»

$$\begin{gathered} L(\alpha_C) \to \sup \\ -\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha_C(t) G_k^{(n)}(t) \leqslant 1, \qquad k \in 1 : d, \\ \alpha_C(t) \geqslant 0, \qquad t \in [-1,\, \tfrac{1}{2}]. \end{gathered} \tag{4}$$

Запишем теперь задачу, в некотором смысле двойственную к поставленной выше задаче:

$$S(f) := \sum_{k=1}^{d} f_k \to \inf,$$

$$-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k \geqslant 1, \qquad t \in [-1, \tfrac{1}{2}], \tag{5}$$

$$f_k \geqslant 0, \qquad k \in 1:d.$$

Для любого $\frac{1}{2}$-кода C и для любого вектора $f = (f_1, \ldots, f_d)$, удовлетворяющего (5), справделиво неравенство

$$L(\alpha_C) \leqslant S(f). \tag{6}$$

Действительно,

$$L(\alpha_C) \leqslant \sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \Big[-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t)\, f_k\Big] \alpha_C(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{d} f_k \Big[-\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} G_k^{(n)}(t)\, \alpha_C(t)\Big] \leqslant \sum_{k=1}^{d} f_k = S(f).$$

Для $|C|$ получаем оценку $|C| \leqslant 1 + S(f)$.

Ф. Дельсарт [2] формулировал полученную оценку в терминах алгебраических полиномов. Введём полином

$$P(t) = 1 + \sum_{k=1}^{d} f_k\, G_k^{(n)}(t). \tag{7}$$

Ограничения (5) равносильны неравенствам

$$P(t) \leqslant 0,\ t \in [-1,\ \tfrac{1}{2}]; \quad f_k \geqslant 0,\ k \in 1:d. \tag{8}$$

Приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1 (Ф. Дельсарт)**.** *Если алгебраический полином* (7) *удовлетворяет ограничениям* (8), *то для произвольного* $\frac{1}{2}$*-кода* C *справедлива оценка*

$$|C| \leqslant P(1) = 1 + \sum_{k=1}^{d} f_k. \tag{9}$$

З а м е ч а н и е. Неравенство (9) справедливо при любом выборе степени d полинома $P(t)$. Указанный вывод теоремы Дельсарта получен в книге [3, гл. 13].

4°. Интересная модификация теоремы Дельсарта предложена в краткой заметке [1]. Идея состоит в том, чтобы к ограничениям (4) добавить дополнительные ограничения на $\alpha_C(t)$. Эти дополнительные ограничения установим в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $C = \{x_1, \dots, x_M\}$ — сферический $\frac{1}{2}$-код, m — натуральное число, $t_m = -\sqrt{(m+1)/(2m)}$. Тогда*

$$\sum_{-1 \leqslant t < t_m} \alpha_C(t) \leqslant m - 1. \tag{10}$$

Доказательство. Зафиксируем $k \in 1 : M$. Пусть $A_k(t)$ — количество векторов x_i таких, что $x_i \cdot x_k = t$. Тогда $\alpha_C(t) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} A_k(t)$. Достаточно для любого $k \in 1 : M$ доказать неравенство

$$\sum_{-1 \leqslant t < t_m} A_k(t) \leqslant m - 1.$$

Допустим противное: при некотором $k \in 1 : M$ найдутся m векторов $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in C$ таких, что

$$x^{(i)} \cdot x_k < t_m, \qquad i \in 1 : m. \tag{11}$$

Рассмотрим и оценим сумму

$$S := \sum_{i,j=1}^{m} x^{(i)} \cdot x^{(j)} \leqslant m + (m^2 - m) \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} m(m+1). \tag{12}$$

С другой стороны, $S = X \cdot X$, где $X = \sum_{i=1}^{m} x^{(i)}$. Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$\|X\|^2 \geqslant (X \cdot x_k)^2.$$

Отсюда

$$S \geqslant \big(\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} \cdot x_k\big)^2.$$

В силу (11) $\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} \cdot x_k < m t_m < 0$. Следовательно,

$$S > (m t_m)^2 = m^2 \frac{m+1}{2m} = \tfrac{1}{2} m(m+1).$$

Получили противоречие с неравенством (12). □

Замечание. $t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$, $t_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}} \approx -0.816$.

Следующая теорема приведена в [1] без доказательства и только для $m = 3$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $C = \{x_1, \ldots, x_M\}$ — сферический $\frac{1}{2}$-код, а $r_m = -t_m - \sqrt{3}$. Тогда при любом $m \geqslant 3$ выполнено неравенство*

$$(m-1) \sum_{-1 \leqslant t \leqslant r_m} \alpha_C(t) + \sum_{r_m < t < t_m} \alpha_C(t) \leqslant m - 1.$$

З а м е ч а н и е. Неравенство $r_m < t_m$ выполнено при всех $m \geqslant 3$, а неравенство $-1 \leqslant r_m$ выполнено при $m \in 3 : 13$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В предыдущей теореме получены неравенства

$$\sum_{-1 \leqslant t < t_m} A_k(t) \leqslant m - 1, \qquad k \in 1 : M.$$

Зафиксируем $k \in 1 : M$. Нам нужно доказать неравенство

$$(m-1) \sum_{-1 \leqslant t \leqslant r_m} A_k(t) + \sum_{r_m < t < t_m} A_k(t) \leqslant m - 1.$$

Оно равносильно утверждению: если $x^{(1)} \in C$, $x^{(1)} \cdot x_k \leqslant r_m$, то не существует $x^{(2)} \in C$, $x^{(2)} \neq x^{(1)}$, такого, что $r_m < x^{(2)} \cdot x_k < t_m$.

Допустим противное: такой вектор $x^{(2)}$ существует. Тогда

$$\|x^{(1)} + x^{(2)}\|^2 = \|x^{(1)}\|^2 + 2x^{(1)} \cdot x^{(2)} + \|x^{(2)}\|^2 \leqslant 3.$$

В то же время справедлива оценка снизу

$$\|x^{(1)} + x^{(2)}\|^2 \geqslant \big((x^{(1)} + x^{(2)}) \cdot x_k\big)^2 > (r_m + t_m)^2 = (-\sqrt{3})^2 = 3.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

З а м е ч а н и е. Приведём численное значение, используемое в дальнейшем:

$$r_3 = -0.915.$$

5°. Выберем натуральное число d.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$L(\alpha_C) := \sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha_C(t) \to \sup,$$

$$
\begin{gathered}
\alpha_C(t) \geqslant 0, \qquad t \in \left[-1, \tfrac{1}{2}\right]; \\
-\sum_{-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \alpha_C(t)\, G_k^{(n)}(t) \leqslant 1, \qquad k \in 1:d; \\
\sum_{-1 \leqslant t \leqslant r_3} \alpha_C(t) + \sum_{r_3 < t \leqslant t_2} \alpha_C(t) \leqslant 1; \\
2 \sum_{-1 \leqslant t \leqslant r_3} \alpha_C(t) + \sum_{r_3 < t \leqslant t_2} \alpha_C(t) + \sum_{t_2 < t < t_3} \alpha_C(t) \leqslant 2.
\end{gathered}
$$

Последние два ограничения получены из теоремы 2 при $m = 2$ и теоремы 3 при $m = 3$. Поставленной экстремальной задаче соответствует «двойственная задача»:

$$
S(f) := \sum_{k=1}^{d} f_k + f_{d+1} + 2 f_{d+2} \to \inf,
$$

$$
-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k + f_{d+1} + 2 f_{d+2} \geqslant 1, \quad t \in [-1, r_3], \tag{13}
$$

$$
-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k + f_{d+1} + f_{d+2} \geqslant 1, \quad t \in (r_3, t_2], \tag{14}
$$

$$
-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k + f_{d+2} \geqslant 1, \quad t \in (t_2, t_3), \tag{15}
$$

$$
-\sum_{k=1}^{d} G_k^{(n)}(t) f_k \geqslant 1, \quad t \in \left[t_3, \tfrac{1}{2}\right], \tag{16}
$$

$$
f_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, d+2. \tag{17}
$$

Для любого $\frac{1}{2}$-кода C и любого вектора f, удовлетворяющего (13)–(17) справедливо неравенство $L(\alpha_C) \leqslant S(f)$ (аналогичное неравенство доказано в п. 2). Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 4. *Если вектор* $f = (f_1, \ldots, f_{d+2})$ *удовлетворяет ограничениям* (13)–(17)*, то для произвольного* $\frac{1}{2}$*-кода* C *справедливо неравенство*

$$
|C| \leqslant 1 + S(f).
$$

Как следствие получаем оценку для контактного числа: $M_n \leqslant 1 + S(f)$.

6°. Заменив непрерывный параметр t в ограничениях (13)–(17) на точки сетки, получим задачу линейного программирования, которую можно решать на компьютере. При $d = 11$ можно получить оценку $M_9 \leqslant 379$ (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Всемирнов, М. Г. Ржевский. *Верхняя оценка контактного числа в размерности 9* // Успехи матем. наук. 2002. Т. 57. Вып. 5. С. 149–150.

2. Ph. Delsarte. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Repts. Suppl. 1973. N 10. P. 1–97.

3. Дж. Конвей, Н. Слоэн. *Упаковки шаров, решётки и группы.* Т. 1. М.: Мир, 1990. 416 с.