ОЦЕНКА СНИЗУ КОЛИЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

Н. О. Котелина

nad7175@yandex.ru

29 мая 2010 г.

Аннотация

Приводится теорема Дельсарта для оценки снизу числа элементов сферического дизайна и её модификация, использующая только чётные полиномы. Рассматривается соответствующая сеточная задача линейного программирования и приводятся результаты расчётов.

1°. Обозначения и предварительные сведения. Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Пусть

$$S^{n-1} = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| \|x\| = 1\bigr\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть t — натуральное число. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t-дизайном, если

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} P(x)\,dS = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) \tag{1}$$

для всех полиномов $P(x)$ степени не выше t. Здесь σ_n — площадь сферы S^{n-1}.

Одной из важных задач теории дизайнов является нахождение для данных n и t сферического t-дизайна с минимальным количеством элементов (см., например, [4]). Важная оценка снизу для $m = |\Phi|$ была получена Ф. Дельсартом ([1, 5]). Формулировка и доказательство теоремы Дельсарта используют полиномы Гегенбауэра.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

2°. Полиномы Гегенбауэра и теорема Дельсарта. Зафиксируем натуральное $n \geqslant 2$. Рассмотрим вес

$$w_n(u) = (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}, \qquad u \in [-1,1].$$

Пусть $\{Q_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система полиномов Гегенбауэра. Она обладает свойством ортогональности с весом $w_n(u)$

$$\int_{-1}^{1} Q_k(u)\,Q_s(u)\,w_n(u)\,du = 0, \qquad k \neq s.$$

Будем считать, что выполняется следующее условие нормировки

$$Q_k(1) = 1.$$

Для полиномов Гегенбауэра справедливо рекуррентное соотношение

$$Q_0(u) \equiv 1, \qquad Q_1(u) = u,$$
$$\big(k+n-2\big)\,Q_{k+1}(u) = \big(2k+n-2\big)\,u\,Q_k(u) - k\,Q_{k-1}(u).$$

Из него следует, что

$$u\,Q_k(u) = \frac{(k+n-2)\,Q_{k+1}(u) + k\,Q_{k-1}(u)}{2k+n-2}, \qquad k = 1,2,\dots .$$

Обозначив

$$\alpha_k = \frac{k+n-2}{2k+n-2} \quad \text{и} \quad \beta_k = \frac{k}{2k+n-2},$$

получим

$$u\,Q_k(u) = \alpha_k\,Q_{k+1}(u) + \beta_k\,Q_{k-1}(u), \qquad k = 1,2,\dots . \tag{2}$$

Заметим, что при $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$ числа α_k и β_k положительные.

Ф. Дельсарт [5] в 1973 г. предложил замечательный метод оценивания количества элементов сферического дизайна порядка t. Зафиксируем натуральное $d > t$. Пусть $\mathcal{P}_d^+$ — множество алгебраических полиномов степени не выше d, удовлетворяющих условиям

$$F(x) \geqslant 0 \quad \text{для всех } x \in [-1,1] \ \text{ и } \ F(1) > 0.$$

Каждый полином $F(x)$ можно разложить по полиномам Гегенбауэра

$$F(x) = \sum_{k=0}^{d} F_k\,Q_k(x),$$

где коэффициенты Фурье F_k определяются следующей формулой

$$F_k = \frac{(F, Q_k)}{\|Q_k\|^2}\,, \qquad k \in 0 : d.$$

Здесь $(\ ,\ )$ — скалярное произведение в $L_2[-1,1]$ с весом $w_n(u)$, $\|Q_k\|^2 = (Q_k, Q_k)$. Введём множество

$$M(n,t,d) = \big\{F \in \mathcal{P}_d^+ \;\big|\; F_k \leqslant 0,\ k \in t+1 : d\big\}.$$

ТЕОРЕМА 1 (Дельсарт [5])**.** *Пусть* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ *— сферический дизайн порядка* t*. Тогда*

$$m \geqslant \sup\left\{\frac{F(1)}{F_0} \;\middle|\; F \in M(n,t,d)\right\}, \tag{3}$$

где F_0 *— нулевой коэффициент Фурье полинома* $F(x)$*.*

З а м е ч а н и е. Теорему Дельсарта можно переформулировать в следущем виде. Обозначим $b(n,t)$ минимальное количество элементов сферического дизайна порядка t в пространстве $\mathbb{R}^n$ (при условии, что хотя бы один такой сферический дизайн существует). Тогда справедливо неравенство

$$b(n,t) \geqslant \sup\left\{\frac{F(1)}{F_0} \;\middle|\; F \in M(n,t,d)\right\},$$

где F_0 — нулевой коэффициент Фурье полинома $F(x)$.

Для оценки снизу количества элементов сферического t-дизайна можно также использовать модификацию теоремы 1, использующую только чётные полиномы.

3°. Модификация теоремы Дельсарта, использующая только чётные полиномы. Пусть везде дальше t нечётное, $t = 2s+1$. Введём класс полиномов

$$\widehat{M}(n,t,d) := \big\{F \in M(n,t,d) \;\big|\; F(-u) = F(u)\ \ \forall\, u \in [-1,1]\big\}.$$

Тогда справедлива теорема, которая впервые появилась в работе [3]. Ниже приведено более подробное её доказательство.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо неравенство*

$$b(n,t) \geqslant \sup\left\{\frac{2F(1)}{F_0} \;\middle|\; F \in \widehat{M}(n,t,d)\right\}, \tag{4}$$

где F_0 *— нулевой коэффициент Фурье полинома* $F(x)$*.*

Доказательство. Возьмём $\widehat{F} \in \widehat{M}(n,t,d)$. Докажем, что $b(n,t) \geqslant \frac{2\widehat{F}(1)}{\widehat{F}_0}$.

Введём полином $F^*(u) = (1+u)\,\widehat{F}(u)$. Проверим, что $F^* \in M(n,t,d+1)$. Так как $\widehat{F}(u)$ неотрицательный на $[-1,1]$ полином и $\widehat{F}(1) > 0$, то F^* тоже будет неотрицательным на $[-1,1]$ и $F^*(1) > 0$. Рассмотрим коэффициенты Фурье для F^*. При чётном k интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку равен нулю. Получаем

$$F_k^* = \frac{1}{\|Q_k\|^2}\left\{\int_{-1}^{1}\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du + \int_{-1}^{1}u\,\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du\right\} = \widehat{F}_k\,.$$

При нечётном k воспользуемся соотношением (2):

$$\begin{aligned}F_k^* &= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\left\{\int_{-1}^{1}\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du + \int_{-1}^{1}u\,\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du\right\} = \\ &= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\int_{-1}^{1}u\,\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du = \\ &= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\int_{-1}^{1}\widehat{F}(u)\bigl[\alpha_k\,Q_{k+1}(u) + \beta_k\,Q_{k-1}(u)\bigr]w_n(u)\,du = \\ &= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\Bigl[\alpha_k\,\bigl\|Q_{k+1}\bigr\|^2\,\widehat{F}_{k+1} + \beta_k\,\bigl\|Q_{k-1}\bigr\|^2\,\widehat{F}_{k-1}\Bigr].\end{aligned}$$

Проверим, что

$$F_k^* \leqslant 0, \qquad k \in t+1 : d+1.$$

Пусть k чётное, $k \geqslant t+1$. Тогда

$$F_k^* = \widehat{F}_k \leqslant 0.$$

Пусть k нечётное, $k \geqslant t+1$. Тогда $k-1$, $k+1$ чётные и $k-1$, $k+1 \geqslant t+1$, так как t нечётное. Поскольку $\widehat{F} \in \widehat{M}(n,t,d)$, то $\widehat{F}_{k-1} \leqslant 0$, $\widehat{F}_{k+1} \leqslant 0$ и, следовательно, $F_k^* \leqslant 0$. Из этого следует, что $F^* \in M(n,t,d+1)$. По оценке Дельсарта (3) получаем, что

$$b(n,t) \geqslant \frac{F^*(1)}{F_0^*}\,, \tag{5}$$

причём

$$F_0^* = \frac{1}{\|Q_0\|^2}\int_{-1}^{1}\bigl(1+u\bigr)\,\widehat{F}(u)\,w_n(u)\,du = \widehat{F}_0\,, \qquad F^*(1) = 2\widehat{F}(1).$$

Следовательно, (5) можно переписать в виде

$$b(n,t) \geqslant \frac{2\widehat{F}(1)}{\widehat{F}_0}\,. \tag{6}$$

Переходя к супремуму по $\widehat{F}$ из класса $\widehat{M}(n,t,d)$, получаем оценку (4).

Теорема доказана. □

4°. Сеточная задача линейного программирования. Для данных n, t, используя оценку Дельсарта (4), оценим величину $b(n,t)$. Будем предполагать, как и ранее, что t нечётное, $t = 2s+1$. Выберем $d > s$ и равномерную сетку на $[0,1]$. Положим

$$u_i = \frac{i-1}{M_0}\,, \qquad i = 1, \dots, M_0 + 1.$$

Задача оценивания $b(n,t)$ сводится к нахождению полинома $F(u) \in \widehat{M}(n,t,2d)$ вида

$$F(u) = F_0 + \sum_{k=1}^{d} F_k\, Q_{2k}(u),$$

максимизирующего $F(1)$, при условии $F_k \leqslant 0$, $k \geqslant s+1$. При этом F_0 будем фиксировать, взяв равным 1. Запишем соответствующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} &L(F_1, \dots, F_d) := 2F(1) = 2 + 2(F_1 + F_2 + \dots + F_d) \to \max, \\ &\quad F(u_i) = 1 + \sum_{k=1}^{d} F_k\, Q_{2k}(u_i) \geqslant 0, \qquad i \in 1 : M_0 + 1, \\ &\quad F_0 = 1, \\ &\quad F_k \leqslant 0, \qquad k \in s+1 : d. \end{aligned} \tag{7}$$

Если $(F_1^*, \dots, F_d^*)$ — оптимальное решение (7), то $F^*(u) = 1 + \sum_{k=1}^{d} F_k^*\, Q_{2k}(u)$ — оптимальный полином. Для того, чтобы на отрезке [0, 1] выполнялось условие неотрицательности, введём величину

$$\varepsilon = -\min\bigl\{F^*(u) \bigm| u \in [0,\ 1]\bigr\},$$

и рассмотрим полином

$$\widetilde{F}(u) = F^*(u) + \varepsilon.$$

Заметим, что $\widetilde{F}(u) \geqslant 0$ на [0, 1] и $\widetilde{F}(u) \in \widehat{M}(n,t,d)$. Коэффициенты $\widetilde{F}$ и F^* связаны соотношениями

$$\widetilde{F}_k = F_k^*, \quad k = 1 : d, \qquad \widetilde{F}_0 = F_0^* + \varepsilon.$$

По оценке Дельсарта (4)

$$b(n,t) \geqslant \frac{2\widetilde{F}(1)}{\widetilde{F}_0} = \frac{2(F(1) + \varepsilon)}{1 + \varepsilon} = \frac{L^* + 2\varepsilon}{1 + \varepsilon}\,,$$

где $L^* = L(F_1^*, \dots, F_d^*)$ — максимальное значение целевой функции.

5°. Модифицированный симплекс-метод. В задаче (7) представим

$$F_k = F_k' - F_k'', \qquad F_k' \geqslant 0,\ F_k'' \geqslant 0, \qquad k \in 1:s;$$
$$F_k = -F_k'', \qquad F_k'' \geqslant 0, \qquad k \in s+1:d.$$

Добавим переменные z_i, $i \in 1 : M_0 + 2$, и запишем задачу, эквивалентную (7):

$$\widetilde{L}(F_1, \dots, F_d) := -2F(1) = -2 - 2\sum_{k=1}^{s} (F_k' - F_k'') + 2\sum_{k=s+1}^{d} F_k'' \to \min,$$

$$F_0 + \sum_{k=1}^{s} Q_{2k}(u_i) \left(F_k' - F_k''\right) - \sum_{k=s+1}^{d} Q_{2k}(u_i)\, F_k'' - z_i = 0, \quad i \in 1 : M_0 + 1; \tag{8}$$
$$F_0 = 1,$$
$$F_k' \geqslant 0,\ \ k \in 1:s; \quad F_k'' \geqslant 0,\ \ k \in 1:d, \quad z_i \geqslant 0,\ \ i \in 1 : M_0 + 1.$$

Введём индексные множества $M = 1 : M_0 + 2$, $D = 1 : d$ и рассмотрим матрицу $A[M, D]$ с элементами

$$A[i, k] = Q_{2k}(u_i), \qquad i \in 1 : M_0 + 1, \quad k \in 1 : d;$$
$$A[M_0 + 2, k] = 0, \qquad k \in 1 : d.$$

Тогда систему ограничений в задаче (8) можно переписать в виде

$$F_0\, \mathbf{1}[M] + \sum_{k=1}^{s} \left(F_k' - F_k''\right) A[M, k] - \sum_{k=s+1}^{d} F_k'' A[M, k] - \sum_{i=1}^{M_0+1} z_i\, e_i = b[M],$$

где

$$\mathbf{1}[M] = (1, \dots, 1)^T, \qquad b[M] = (0, \dots, 0, 1)^T.$$

Задачу (8) будем решать с помощью модифицированного симплекс-метода.

Укажем начальный базисный план

$$F_0 = 1, \quad z_i = 1 \quad \text{при } \ i \in 1 : M_0 + 1;$$

остальные переменные равны нулю. Проиндексируем неизвестные в задаче (8). Пусть x — массив неизвестных в задаче (8). Положим

$$x[k] = F_k', \ \ k \in 1:s; \quad x[0] = F_0; \quad x[-k] = F_k'', \ \ k \in 1:d;$$
$$x[s+i] = z_i, \quad i \in 1 : M_0 + 1.$$

Тогда множество базисных индексов N' для выбранного нами начального базисного плана выглядит следующим образом:

$$N' = \{0, s+1, \dots, s + M_0 + 1\}, \qquad |N'| = M_0 + 2.$$

Столбцы, соответствующие базисным неизвестным, линейно независимы. Это следует из того, что для базисной матрицы $A[M,N']$ можно указать обратную базисную матрицу $B[N',M]$. Базисная матрица и обратная к ней при $M_0=4$ имеют следующий вид:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}. \qquad (9)$$

При составлении программы мы не будем хранить в памяти компьютера всю матрицу коэффициентов, достаточно хранить матрицу $A[M,D]$.

Обратим внимание на то, как в нашей программе будут вычисляться оценки.

Возьмём границу $barrier = 10^{-14}$. Будем продолжать вычисления, пока максимальная оценка max остаётся не меньше $barrier$. Оценки будем вычислять по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon[F'_k] = y[M]\,A[M,k]+2 && \text{при}\quad k\in 1:s;\\
&\varepsilon[F''_k] = -\varepsilon[F'_k] && \text{при}\quad k\in 1:s;\\
&\varepsilon[F''_k] = -y[M]\,A[M,k]-2 && \text{при}\quad k\in s+1:d;\\
&\varepsilon[z_i] = y[M](-e_i) = -y[i] && \text{при}\quad i\in 1:M_0+1.
\end{aligned}$$

6°. Результаты работы программы. Результаты работы программы поместим в таблицу. В ней K — наименьшее известное количество элементов сферического дизайна, приведенное в [3]. Там же указан источник, где описан сферический дизайн с K элементами, например, при $n=4$, $t=11$, дизайн со 120 элементами описан в [2]; $b_D(n,t)$ — оценка Дельсарта, вычисляемая по следующей формуле (см. [1, 5])

$$b_D(n,t) = 2C_{n+s-1}^{n-1} \quad \text{для}\ \ t=2s+1.$$

Таблица

n	t	d	M_0	L^*	ε	$\frac{L^*+2\varepsilon}{1+\varepsilon}$	$b_D(n,t)$	K
2	3	2	100	4	0	4	4	4
3	5	3	100	12.006	$7.17e-004$	11.99	12	12
4	3	2	100	8	0	8	8	8
4	5	3	100	20.007	0.002	19.97	20	24
4	7	5	100	41.1	$7.54e-004$	41.07	40	46
4	7	5	200	41.1	$1.81e-004$	41.09	40	46
4	9	7	100	73.64	0.006	73.20	70	86
4	11	11	100	120.05	0.06	119.33	112	120
4	19	19	1000	499.35	0.002	498.61	440	720
8	7	4	100	240	0.001	239.70	240	240
8	11	8	800	1856	$2.28e-004$	1855.50	1584	2400
8	13	12	1000	4360.7	$7.02e-004$	4357.7	3432	24240
8	15	16	500	9191.5	0.005	9140	6864	26400
12	5	3	100	156.08	$6.34e-004$	155.98	156	756
12	7	4	100	728.52	0.002	727.08	728	756
12	9	6	600	2939.80	$2.28e-4$	2939.10	2730	8064
12	11	7	1000	10604	$1.05e-4$	10602	8736	50400

ЛИТЕРАТУРА

1. Delsarte P., Goetals J. M., Seidel J. J. *Spherical codes and designs* // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

2. Андреев Н. Н. *Минимальный дизайн 11-го порядка на трехмерной сфере* //Матем. заметки. Сер. 2000. Т. 67. № 4. С. 489–497.

3. de la Harpe P., Pache C., Venkov B. *Construction of spherical cubature formulas, using lattices* // Алгебра и анализ. 2006. Т. 18. Вып. 1. С. 162–186.

4. Bonnai E., Munemasa A., Venkov B. *The nonexistence of certain tight spherical designs* // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. Вып. 4. С. 1–23.

5. Delsarte P. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Reports (Suppl.). 1973. V. 10.