ДВОЙСТВЕННЫЕ ФРЕЙМЫ*

В. Н. Малозёмов   Н. А. Соловьёва
malv@math.spbu.ru   vinyo@mail.ru

21 августа 2007 г.

Доклад является вариацией на темы из [1, с. 101–106] и [2].

1°. Рассмотрим при $m \geqslant n$ матрицу $\varPhi = \varPhi[1 : n, 1 : m]$ с комплексными элементами. Столбцы этой матрицы обозначим $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Набор векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ называется *фреймом* в $\mathbb{C}^n$, если эрмитова матрица $S = \varPhi\varPhi^*$ является положительно определённой.

Рассмотрим ещё одну матрицу $\widetilde{\varPhi} = \widetilde{\varPhi}[1 : n, 1 : m]$ со столбцами $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m$. Набор векторов $\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m\}$ называется *двойственным фреймом*, если эрмитова матрица $\widetilde{S} = \widetilde{\varPhi}\widetilde{\varPhi}^*$ положительно определена и выполнено условие

$$\widetilde{\varPhi}\varPhi^* = I_n, \tag{1}$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Двойственные фреймы существуют. Действительно, матрица $\widetilde{\varPhi} = S^{-1}\varPhi$ удовлетворяет условию (1). Кроме того,

$$\widetilde{S} := \widetilde{\varPhi}\widetilde{\varPhi}^* = S^{-1}\varPhi\varPhi^* S^{-1} = S^{-1}.$$

Поскольку S^{-1} — положительно определённая эрмитова матрица, то по определению столбцы матрицы $\widetilde{\varPhi}$, имеющие вид

$$\widetilde{\varphi}_j = S^{-1}\varphi_j, \qquad j \in 1 : m, \tag{2}$$

образуют двойственный фрейм. Обозначим его $\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m\}$. Этот фрейм называется *каноническим двойственным фреймом* по отношению к фрейму $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$.

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

2°. Покажем, что канонический двойственный фрейм обладает экстремальным свойством.

С произвольным двойственным фреймом $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ свяжем величину

$$P = \sum_{j=1}^{m} \|\psi_j\|^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Канонический двойственный фрейм является единственным двойственным фреймом, на котором величина P достигает наименьшего значения.*

Доказательство. Возьмём произвольный двойственный фрейм $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$, отличный от $\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m\}$ (если таковой существует). Обозначим через Ψ матрицу со столбцами $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Ненулевая матрица $H = \Psi - \widetilde{\Phi}$, согласно (1), удовлетворяет условию $H\Phi^* = 0$. Принимая во внимание, что $\widetilde{\Phi}^* = \Phi^* S^{-1}$, получаем

$$H\widetilde{\Phi}^* = \big(H\Phi^*\big)\, S^{-1} = 0. \tag{3}$$

Теперь запишем

$$\sum_{j=1}^{m} \|\psi_j\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} |\psi_j(i)|^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \big|\Psi[i,j]\big|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \big|\widetilde{\Phi}[i,j] + H[i,j]\big|^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \big|\widetilde{\Phi}[i,j]\big|^2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \big|H[i,j]\big|^2 +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} H[i,j]\,\overline{\widetilde{\Phi}[i,j]}.$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \big|\widetilde{\Phi}[i,j]\big|^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{\varphi}_j(i)|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|\widetilde{\varphi}_j\|^2$$

и в силу (3)

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} H[i,j]\,\overline{\widetilde{\Phi}[i,j]} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} H[i,j]\,\widetilde{\Phi}^*[j,i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (H\widetilde{\Phi}^*)[i,i] = 0,$$

то

$$\sum_{j=1}^{m} \|\psi_j\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|\widetilde{\varphi}_j\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \big|H[i,j]\big|^2.$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое. □

В дальнейшем будем использовать только канонические двойственные фреймы.

3°. Умножим обе части равенства (1) справа на вектор $x \in \mathbb{C}^n$. Получим

$$x = \widetilde{\varPhi}\bigl(\varPhi^* x\bigr). \tag{4}$$

Если учесть, что

$$\bigl(\varPhi^* x\bigr)(j) = \sum_{i=1}^{n} \varPhi^*[j,i] \times x(i) = \sum_{i=1}^{n} x(i) \times \overline{\varPhi[i,j]} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x(i) \times \overline{\varphi_j(i)} = \langle x, \varphi_j \rangle,$$

то формулу (4) можно переписать так:

$$x = \sum_{j=1}^{m} \langle x, \varphi_j \rangle \widetilde{\varphi}_j. \tag{5}$$

Вернёмся к равенству (1) и с помощью эрмитова сопряжения преобразуем его к эквивалентному виду

$$\varPhi \widetilde{\varPhi}^* = I_n.$$

Умножим обе части последнего равенства справа на вектор $x \in \mathbb{C}^n$. Получим

$$x = \varPhi\bigl(\widetilde{\varPhi}^* x\bigr) = \sum_{j=1}^{m} \langle x, \widetilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j. \tag{6}$$

Подведём итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого вектора* $x \in \mathbb{C}^n$ *справедливы разложения* (5) *и* (6), *в которых* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *— некоторый фрейм и* $\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m\}$ *— канонический двойственный фрейм.*

4°. Если матрица фрейма $S = \varPhi \varPhi^*$ имеет вид $S = A\, I_n$ с $A > 0$, то соответствующий фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ называется *жёстким*. Элементы канонического двойственного фрейма по отношению к жёсткому фрейму согласно (2) допускают представление

$$\widetilde{\varphi}_j = \tfrac{1}{A}\, \varphi_j, \qquad j \in 1:m.$$

Разложения (5) и (6) в случае жёсткого фрейма объединятся в одно разложение

$$x = \tfrac{1}{A} \sum_{j=1}^{m} \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

5°. Жёсткий фрейм с $A = 1$ называется *фреймом Парсеваля.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Любой фрейм может быть преобразован во фрейм Парсеваля.*

Доказательство. Возьмём фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ с матрицей фрейма $S = \Phi\Phi^*$. Положим $\widehat{\Phi} = S^{-\frac{1}{2}}\,\Phi$. Так как

$$\widehat{S} := \widehat{\Phi}\,\widehat{\Phi}^* = S^{-\frac{1}{2}}\,\Phi\Phi^* S^{-\frac{1}{2}} = S^{-\frac{1}{2}}\,S\,S^{-\frac{1}{2}} = I_n,$$

то столбцы матрицы $\widehat{\Phi}$, имеющие вид

$$\widehat{\varphi}_j \;=\; S^{-\frac{1}{2}}\,\varphi_j, \qquad j \in 1:m,$$

образуют фрейм Парсеваля. Предложение доказано. □

Отметим, что фрейм Парсеваля совпадает со своим каноническим двойственным фреймом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.

2. Casazza P. G. Custom building finite frames // Contemporary Math. 2004. V. 345. P. 61–86.