ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ДИЗАЙНОВ*

Н. О. Котелина — nad7175@yandex.ru
А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

4 апреля 2009 г.

Сферические дизайны исследовались в работах [1, 2, 4, 5]. В данном докладе выводится формула для константы A_t в тождестве Варинга, определяющем сферические t-дизайны. Приводится второе определение сферических t-дизайнов, связанное с интегрированием по сфере S^{n-1}, и доказывается эквивалентность двух определений.

1°. Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Всюду далее t — чётное число, $t \geqslant 2$.

Определение. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется *сферическим t-дизайном*, если существует константа $A_t > 0$ такая, что выполнено тождество Варинга

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, x\rangle\big]^t = A_t \, \|x\|^t, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Такое определение используется в [2].

Нетрудно определить константу A_t последовательным применением оператора Лапласа Δ к обеим частям тождества (1). После первого применения Δ получим равенство

$$t\,(t-1) \sum_{i=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_i\rangle\big]^{t-2} = A_t \, t\,(t+n-2)\,\|x\|^{t-2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

откуда следует, что Φ является $(t-2)$-дизайном с константой

$$A_{t-2} = A_t\,(t+n-2)/(t-1).$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

Пусть $s = t/2$. После $s-1$ применений Δ придём к равенству

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_i\rangle\big]^2 = A_2\, \|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Это равенство означает, что система Φ является жестким фреймом в $\mathbb{R}^n$ (см. [3]). Применим к (2) оператор Δ. Получим равенство $2m = A_2 \cdot 2n$, откуда $A_2 = m/n$ (эта константа известна в теории фреймов [3]). Из рекуррентного соотношения

$$A_p = A_{p-2}\,\frac{p-1}{p+n-2}\,, \qquad p = 4, 6, \dots, t; \qquad A_2 = \frac{m}{n}$$

легко получить формулу $A_t = cm$, где

$$c = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\dots(n+t-2)}\,. \tag{3}$$

Попутно показано, что сферический t-дизайн Φ является сферическим p-дизайном для всех $p = 2, 4, \dots, t$.

2°. В работах [1, 4, 5] использовалось другое определение сферических t-дизайнов. Приведём два утверждения, устанавливающие связь между двумя определениями. Пусть $\mathcal{P}_{n,t}$ — пространство однородных полиномов от n переменных $x_1, \dots, x_n$ степени t.

ТЕОРЕМА 1. *Тождество* (1) *равносильно соотношению*

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Q(\varphi_i) \qquad \forall\ Q \in \mathcal{P}_{n,t}\,, \tag{4}$$

где $\sigma_n = 2\,\pi^{n/2}\big/\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)$ *— площадь сферы* S^{n-1}.

З а м е ч а н и е. Равенство (4) означает, что для любого полинома Q из $\mathcal{P}_{n,t}$ среднее значение $Q(x)$ на сфере равно среднему значению $Q(x)$ на системе точек $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$.

3°. Для доказательства теоремы 1 нам потребуются ряд вспомогательных сведений.

В мемуаре [2], формула (8.11), приводится значение интеграла от одночлена x_1^t по единичной сфере S^{n-1} при четном $t = 2s$. Это значение чудесным образом выражается через константу c, определённую формулой (3):

$$\int_{S^n} x_1^t\, dS = \sigma_n \prod_{j=0}^{s-1} \frac{2j+1}{2j+n} = c\,\sigma_n, \tag{5}$$

где σ_n, как и выше, равно площади S^{n-1}. Формула (5) является частным случаем формулы для интеграла от одночлена $x_1^{i_1}\, x_2^{i_2}\, \ldots\, x_n^{i_n}$, приведённой в [6, с. 347]. Далее установим лемму, которая в [2] приписывается Гильберту.

ЛЕММА. *Для любого вектора* $\varphi \in \mathbb{R}^n$ *справедливо равенство*

$$I := \int_{S^{n-1}} \bigl[\langle \varphi, x\rangle\bigr]^t \, dS_\varphi = c\, \sigma_n \, \|x\|^t .$$

Доказательство. Зафиксируем вектор $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Сделаем ортогональное преобразование $\varphi = Uy$. Поскольку $\bigl|\det(U)\bigr| = 1$, получим равенство

$$I = \int_{S^{n-1}} \bigl[\langle Uy, x\rangle\bigr]^t \, dS_y = \int_{S^{n-1}} \bigl[\langle U^T x, y\rangle\bigr]^t \, dS_y \, . \tag{6}$$

Выберем теперь U так, чтобы

$$U^T x = \|x\|\, e_1 := \|x\|\, (1, 0, \ldots, 0)^T . \tag{7}$$

Для этого нужно взять первый столбец U равным $x/\|x\|$, а остальные столбцы выбрать так, чтобы все n столбцов были ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$. Тогда матрица U будет ортогональной и будет выполнено (7). В силу (7), (6) и (5) имеем

$$I = \int_{S^{n-1}} \bigl[\langle \|x\|\, e_1, y\rangle\bigr]^t \, dS_y = \|x\|^t \int_{S^{n-1}} y_1^t \, dS_y = c\, \sigma_n \, \|x\|^t .$$

Лемма доказана. □

4°. Возьмём два полинома $f, g \in \mathcal{P}_{n,t}$:

$$f(x) = \sum_{|i|=t} a(i)\, x^i, \qquad g(x) = \sum_{|i|=t} b(i)\, x^i,$$

где $i = (i_1, \ldots, i_n)$ — мультииндекс, $|i| = i_1 + \ldots + i_n$, $x^i = x_1^{i_1}\, x_2^{i_2}\, \ldots\, x_n^{i_n}$. Введём скалярное произведение

$$[f, g] = \sum_{|i|=t} \frac{a(i)\, b(i)}{c(i)} \, , \quad \text{где} \quad c(i) = \frac{t!}{i_1!\, i_2! \, \ldots \, i_n!} \, .$$

С этим скалярным произведением $\mathcal{P}_{n,t}$ становится гильбертовым пространством. Для любого $\varphi \in \mathbb{R}^n$ введем полином

$$\rho_\varphi(x) = \bigl[\langle \varphi, x\rangle\bigr]^t = \bigl[\varphi_1\, x_1 + \ldots + \varphi_n\, x_n\bigr]^t .$$

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}^n$ и $f \in \mathcal{P}_{n,t}$ легко проверяется равенство

$$[\rho_\varphi, f] = f(\varphi).$$

Оно следует из соотношений

$$\rho_\varphi(x) = \sum_{|i|=t} c(i)\, \varphi^i\, x^i, \tag{8}$$

$$[\rho_\varphi, f] = \sum_{|i|=t} \frac{c(i)\, \varphi^i\, a(i)}{c(i)} = f(\varphi).$$

Значит, $\rho_\varphi(x)$ является воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{P}_{n,t}$.

5°. Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть выполнено тождество (1), которое можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i}(x) = A_t\, \omega_t(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где $\omega_t(x) = \|x\|^t$. В пункте 1° было установлено, что $A_t = cm$. Умножим (9) скалярно на произвольный полином $Q \in \mathcal{P}_{n,t}$:

$$\sum_{i=1}^{m} [\rho_{\varphi_i}, Q] = c\, m\, [\omega_t, Q]. \tag{10}$$

Чтобы перейти к интегралам, воспользуемся леммой:

$$\int_{S^{n-1}} \rho_\varphi(x)\, dS_\varphi = \int_{S^{n-1}} \big[\langle x, \varphi\rangle\big]^t\, dS_\varphi = c\, \sigma_n\, \|x\|^t, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на Q. Получим

$$\Big[\int_{S^{n-1}} \rho_\varphi(x)\, dS_\varphi\,,\ Q(x) \Big] = c\, \sigma_n\, [\omega_t, Q]. \tag{11}$$

Имеем в силу (8)

$$\int_{S^{n-1}} \rho_\varphi(x)\, dS_\varphi = \sum_{|i|=t} c(i)\, M(i)\, x^i,$$

где $M(i) = \int_{S^{n-1}} \varphi^i\, dS_\varphi$. Полином $Q(x)$ запишем в виде

$$Q(x) = \sum_{|i|=t} q(i)\, x^i.$$

Тогда скалярное произведение в левой части (11) равно

$$\sum_{|i|=t} \frac{c(i)\, M(i)\, q(i)}{c(i)} = \int_{S^{n-1}} \sum_{|i|=t} q(i)\, \varphi^i\, dS_\varphi = \int_{S^{n-1}} Q(\varphi)\, dS_\varphi\,. \tag{12}$$

Таким образом, равенство (11) эквивалентно равенству

$$\int_{S^{n-1}} Q(\varphi)\, dS_\varphi = c\, \sigma_n\, [\omega_t, Q].$$

В интеграле букву φ заменим на x, а скалярное произведение выразим из (10). Получим

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} [\rho_{\varphi_i}, Q] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Q(\varphi_i).$$

Пришли к равенству (4).

Обратно, пусть выполнено (4) для любого $Q \in \mathcal{P}_{n,t}$. Равенство (4) можно записать в виде

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(\varphi)\, dS_\varphi = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} [\rho_{\varphi_i}, Q].$$

В силу равенств (12) интеграл в левой части записывается так:

$$\frac{1}{\sigma_n} \Big[\int_{S^{n-1}} \rho_\varphi(x)\, dS_\varphi\,,\ Q(x) \Big] = \Big[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i},\ Q \Big]. \tag{13}$$

По лемме

$$\int_{S^{n-1}} \rho_\varphi(x)\, dS_\varphi = \int_{S^{n-1}} \big[\langle x, \varphi \rangle \big]^t\, dS_\varphi = c\, \sigma_n\, \omega_t(x).$$

Подставляя в (13), получаем

$$c\, [\omega_t, Q] = \Big[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i},\ Q \Big].$$

Поскольку это выполнено для любого $Q \in \mathcal{P}_{n,t}$, то

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i}(x) = c\, m\, \omega_t(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

что эквивалентно (1). Таким образом, условия (1) и (4) равносильны.

Теорема 1 доказана. □

6°. Симметричные дизайны. Рассмотрим систему из $2m$ точек

$$\Phi_0 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, -\varphi_1, \ldots, -\varphi_m\}.$$

Положим $\varphi_{m+i} = -\varphi_i$. Тогда $\Phi_0 = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2m}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ — сферический t-дизайн. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2m} Q(\varphi_i) \tag{14}$$

для любого полинома $Q(x)$ степени не выше $t+1$.

Эта теорема легко выводится из теоремы 1. Полином $Q(x)$ можно записать в виде $Q(x) = Q_0(x) + Q_1(x) + \ldots + Q_{t+1}(x)$, где Q_p — однородный полином степени p. Для $Q_0(x) \equiv C = const$ равенство (14) примет вид $C = C$. Сферический t-дизайн Φ является сферическим p-дизайном для $p = 2, 4, \ldots, t$. Для этих p по теореме 1

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q_p(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Q_p(\varphi_i) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2m} Q_p(\varphi_i).$$

Если же p нечетно, $p = 1, 3, \ldots, t+1$, то равенство (14) будет выполняться как равенство $0 = 0$.

В работах [1, 4, 5, 8] система Φ_0, удовлетворяющая (14), называется сферическим $(t+1)$-дизайном.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Venkov, *Réseaux et designs sphériques* // Réseaux Euclidiens, Designs sphériques et Formes Modulaires, Enseign. Math., Géneve, 2001, P. 10–86.

2. B. Reznick, *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 96 (1992), No. 463, P. 1–155.

3. В. Н. Малоземов, А. Б. Певный, *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы математического анализа, вып. 39 (2009), С. 3–25.

4. P. Delsarte, J. M. Goetals, J. J. Seidel, *Bounds for systems of lines and Jacobi polynomials* // Philips Res. Repts. 30 (1975), No. 3, P. 91–105.

5. E. Bonnai, A. Munemasa, B. Venkov, *The nonexistence of certain tight spherical designes* // Алгебра и анализ, Т. 16 (2004), вып. 4, С. 1–23.

6. P. J. Davis, P. Rabinovitz, *Methods of numerical integration*, 2nd ed., Academic Press, 1984.

7. В. А. Юдин, *Вращение сферических дизайнов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. № 3. С. 39–45.

8. L. C. Leal Junior, V. A. Menegatto, *On the construction of spherical designes* // TEMA Tend. Mat. Appl. Comput. 2007. V. 8. No. 3. P. 423–432.