ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА НА ФРЕЙМАХ*

М. Н. Истомина

istomina@syktsu.ru

6 мая 2009 г.

Настоящий доклад инициирован докладом В. Н. Малозёмова [1].

1°. Экстремальная задача на фреймах Мерседес-Бенц. Пусть $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$ — фрейм Мерседес–Бенц в $\mathbb{R}^n$ (см. [2]). Здесь и далее верхний индекс указывает на размерность пространства.

Возьмём ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\xi\|^2 := \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j^2 \to \min,$$

$$\frac{n}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \, b_j^n = a.$$

В докладе [1] доказывается, что минимум достигается на единственном векторе ξ^* с компонентами $\xi_j^* = \langle a, b_j^n \rangle$, $j \in 1 : n+1$.

2°. Экстремальная задача на жёстких фреймах. Рассмотрим при $m > n$ матрицу $\Phi = \Phi[1 : n, 1 : m]$ с вещественными элементами. Столбцы этой матрицы обозначим $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Набор векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ называется *жёстким фреймом* в $\mathbb{R}^n$, если

$$\Phi \, \Phi^T = A \, I_n \, .$$

Произвольный ненулевой вектор a из $\mathbb{R}^n$ может быть представлен в виде (см. [2]) :

$$a = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^{m} \xi_j \, \varphi_j \, .$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Найдём разложение вектора a по жёсткому фрейму с наименьшей l_2-нормой вектора коэффициентов разложения. Это соответствует решению следующей задачи минимизации:

$$
\begin{gathered}
\|\xi\|^2 := \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \to \min, \\
\frac{1}{A}\,\Phi\,\xi = a.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Единственным решением задачи* (1) *является вектор* ξ^* *с компонентами*

$$
\xi_j^* = \langle a, \varphi_j \rangle, \qquad j \in 1:m.
$$

Доказательство. Очевидно, что $\xi^* = \Phi^T a$ удовлетворяет ограничению задачи (1):

$$
\frac{1}{A}\,\Phi\,\Phi^T a = \frac{1}{A}\,A\,I_n\,a = a.
$$

Возьмём произвольный план ξ задачи (1) и положим $h = \xi - \xi^*$. Тогда $\xi = \xi^* + h$, где $\Phi\,h = \mathbb{O}$. Задача (1) перепишется в следующем виде

$$
\|\xi^* + h\|^2 \to \min_{\{h \,|\, \Phi\,h = \mathbb{O}\}}. \tag{2}
$$

Единственным решением задачи (2) является $h^* = \mathbb{O}$. Действительно, если расписать квадрат нормы, получим

$$
\|\xi^*\|^2 + 2\,\langle \xi^*, h\rangle + \|h\|^2 \to \min_{\{h \,|\, \Phi\,h = \mathbb{O}\}}.
$$

Здесь, в силу ограничения $\Phi\,h = \mathbb{O}$, второе слагаемое равно нулю, так как $\langle \xi^*, h\rangle = \langle \Phi^T a, h\rangle = \langle a, \Phi\,h\rangle = 0$. Это гарантирует оптимальность и единственность ξ^*. $\square$

3°. Экстремальная задача на произвольных фреймах. Пусть набор векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ образует фрейм в $\mathbb{R}^n$ $(m > n)$. Тогда $S = \Phi\,\Phi^T$ является симметричной положительно определённой матрицей и для неё существует обратная матрица S^{-1}. Рассмотрим векторы $\widetilde{\varphi}_i = S^{-1}\,\varphi_i$, $i \in 1:m$. Они образуют *канонический двойственный фрейм* (см. [3]).

Введём матрицу $\widetilde{\Phi}$ размера $n \times m$ со столбцами $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m$:

$$
\widetilde{\Phi} = [\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m] = S^{-1}\,\Phi.
$$

Для неё справедливо следующее равенство:

$$
\widetilde{\Phi}\,\Phi^T = \Phi\,\widetilde{\Phi}^T = I_n\,. \tag{3}
$$

Умножив обе части (3) на вектор $a \in \mathbb{R}^n$, получим разложение

$$a = \Phi\,\widetilde{\xi}, \tag{4}$$

где $\widetilde{\xi} = \widetilde{\Phi}^T a$. Следующее предложение есть в книге Добеши [4] (предложение 3.2.4). В конечномерном случае доказательство проводится совсем просто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Единственным решением задачи минимизации*

$$\|\xi\|^2 \to \min_{\{\xi \mid \Phi\,\xi = a\}} \tag{5}$$

является вектор $\widetilde{\xi}$ с компонентами $\widetilde{\xi}_j = \langle a, \widetilde{\varphi}_j\rangle$, $j \in 1:m$.

Доказательство. В силу (4) вектор $\widetilde{\xi}$ удовлетворяет ограничению задачи (5).

Рассмотрим произвольный план ξ задачи (5). Обозначим, как и выше, $h = \xi - \widetilde{\xi}$. Тогда $\Phi\,h = \mathbb{O}$ и $\xi = \widetilde{\xi} + h$. Имеем

$$\langle \widetilde{\xi}, h\rangle = \langle \widetilde{\Phi}^T a, h\rangle = \big\langle (S^{-1}\,\Phi)^T a, h\big\rangle = \langle \Phi^T S^{-1}\,a, h\rangle = \langle S^{-1}\,a, \Phi\,h\rangle = 0.$$

Получаем равенство

$$\|\widetilde{\xi} + h\|^2 = \|\widetilde{\xi}\|^2 + \|h\|^2.$$

Если $\xi \neq \widetilde{\xi}$, то h является ненулевым вектором. Значит $\|\xi\|^2 > \|\widetilde{\xi}\|^2$, что и требовалось доказать. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи на фреймах Мерседес–Бенц* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 25 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0325`)

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы матем. анализа. Вып. 39. 2009. С. 3–25.

3. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Двойственные фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 августа 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0821`)

4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 464 с.