БАНКИ ФИЛЬТРОВ И ФРЕЙМЫ*

В. А. Жёлудев — zhel@post.tau.ac.il

В. Н. Малозёмов — malv@gamma.math.spbu.ru

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

30 марта 2006 г.

Предлагается общий метод построения фреймов в пространстве дискретных периодических сигналов чётной размерности $N = 2N_1$, состоящих из mN_1 сигналов при $m > 2$. Метод основан на использовании банков фильтров совершенной реконструкции. В качестве приложения при $m = 3$ на базе фильтров Баттерворта построено новое семейство вещественных фреймов. Найдены точные границы таких фреймов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье будут использоваться следующие обозначения:

$\mathbb{C}_N$ — пространство сигналов (комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$),

$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{y(j)}$ — скалярное произведение сигналов x и y,

$\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из единицы,

$\mathcal{F}_N$ — дискретное преобразование Фурье (ДПФ) порядка N, сопоставляющее сигналу x сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ с компонентами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\omega_N^{-kj}, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Система сигналов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M$, $M \geqslant N$, называется *фреймом*, если существуют положительные числа A, B такие, что для всех $x \in \mathbb{C}_N$

$$A\,\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} \bigl|\langle x, \varphi_i\rangle\bigr|^2 \leqslant B\,\|x\|^2.$$

Константы A, B называются *границами фрейма*. Начальные сведения о фреймах имеются в [1, 2].

Инициирующими для нас были работы [3, 4], где строились фреймы в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$. Но для дискретного гармонического анализа представляет интерес и N-периодический случай. При построении фреймов в $\mathbb{C}_N$ может быть использован эффективный аппарат дискретного преобразования Фурье [5].

Одним из важных источников, приводящих к фреймам, являются банки фильтров совершенной реконструкции. О них пойдёт речь в разд. 2. Особенность периодического случая состоит в том, что фильтры задаются своими частотными характеристиками. На основе результатов разд. 2 в разд. 3 строятся пары двойственных фреймов. В разд. 4 как частный случай строится семейство вещественных фреймов Баттерворта, которые могут найти применение в цифровой обработке сигналов. Для таких фреймов найдены точные границы.

2. БАНКИ ФИЛЬТРОВ

2.1. Следуя основополагающей статье [3], рассмотрим банк из m фильтров анализа и m фильтров синтеза, где $m > 2$. Но в отличие от [3], будем предполагать, что все сигналы и фильтры являются N-периодическими. Считаем также, что N – чётное число, $N = 2N_1$.

Начнём с m фильтров анализа $\widetilde{g}_0, \widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_{m-1}$ из $\mathbb{C}_N$, которые, действуя на сигнал $x \in \mathbb{C}_N$, выдают m сигналов $d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$ из $\mathbb{C}_{N_1}$, таких, что их ДПФ $D_i = \mathcal{F}_{N_1}(d_i)$ связаны с ДПФ $X = \mathcal{F}_N(x)$ сигнала x формулой

$$\begin{gathered} D_i(k) = \tfrac{1}{2}\Bigl[\overline{\widetilde{g}_i(k)}\,X(k) + \overline{\widetilde{g}_i(k+N_1)}\,X(k+N_1)\Bigr]\,, \\ k \in 0 : N_1 - 1\,, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1\,. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Спектры D_i имеют период N_1. Сигналы d_i определяются с помощью обратного ДПФ,

$$d_i = \mathcal{F}_{N_1}^{-1}(D_i)\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1\,. \tag{2.2}$$

Такое определение $\{d_i\}$ равносильно следующему: $d_i(k) = y_i(2k)$, $k \in 0 : N_1 - 1$, где $y_i = \mathcal{F}_N^{-1}\bigl(\widetilde{g}_i\,X\bigr)$.

Фильтры синтеза $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ из $\mathbb{C}_N$ реконструируют спектр сигнала x по формуле

$$\widehat{X}(k) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(k)\, D_i(k)\,, \qquad k \in 0 : N-1\,. \tag{2.3}$$

Сигнал $\widehat{x} = \mathcal{F}_N^{-1}(\widehat{X})$ принимается за восстановленный сигнал x. Если $\widehat{x} = x$, то набор $\{\widetilde{g}_i, g_i \mid i \in 0 : m-1\}$ называется *банком фильтров совершенной реконструкции*.

2.2. Выведем условие совершенной реконструкции. Запишем формулу (2.3) в виде: при $k \in 0 : N_1 - 1$

$$\begin{aligned} \widehat{X}(k) &= \sum_{i=0}^{m-1} g_i(k)\, D_i(k)\,, \\ \widehat{X}(k+N_1) &= \sum_{i=0}^{m-1} g_i(k+N_1)\, D_i(k)\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Матрицы преобразований (2.1) и (2.4) обозначим $\widetilde{P}(k)$ и $P(k)$ соответственно, так что

$$\widetilde{P}(k) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \overline{\widetilde{g}_0(k)} & \overline{\widetilde{g}_0(k+N_1)} \\ \overline{\widetilde{g}_1(k)} & \overline{\widetilde{g}_1(k+N_1)} \\ \vdots & \vdots \\ \overline{\widetilde{g}_{m-1}(k)} & \overline{\widetilde{g}_{m-1}(k+N_1)} \end{bmatrix},$$

$$P(k) = \begin{bmatrix} g_0(k) & g_1(k) & \cdots & g_{m-1}(k) \\ g_0(k+N_1) & g_1(k+N_1) & \cdots & g_{m-1}(k+N_1) \end{bmatrix}.$$

Равенство $\widehat{X} = X$, равносильное $\widehat{x} = x$, выполняется тогда и только тогда, когда

$$P(k)\, \widetilde{P}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{2.5}$$

3. РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО ФРЕЙМУ

3.1. Введём сигналы

$$\psi_i = \mathcal{F}_N^{-1}(g_i)\,, \quad \widetilde{\psi}_i = \mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{g}_i)\,, \qquad i \in 0 : m-1\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо разложение*

$$\widehat{x}(j) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N_1-1} d_i(k)\, \psi_i(j-2k)\,, \qquad j \in \mathbb{Z}\,, \tag{3.1}$$

где коэффициенты $d_i(k)$ определяются формулой (2.2).

Доказательство. Обозначим $x_i = \mathcal{F}_N^{-1}(g_i\, D_i)$. Тогда

$$\widehat{x} = x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}\,.$$

По определению $\mathcal{F}_N^{-1}$ имеем

$$x_i(j) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} g_i(l)\, D_i(l)\, \omega_N^{lj}\,.$$

Поскольку $D_i(l) = \sum_{k=0}^{N_1-1} d_i(k)\, \omega_{N_1}^{-lk}$ и $\omega_{N_1}^{-lk} = \omega_N^{-2lk}$, то

$$x_i(j) = \sum_{k=0}^{N_1-1} d_i(k) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} g_i(l)\, \omega_N^{l(j-2k)} \right\} = \sum_{k=0}^{N_1-1} d_i(k)\, \psi_i(j-2k)\,.$$

Суммируя по i от 0 до $m-1$, придём к (3.1). □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливы равенства*

$$d_i(k) = \big\langle x, \widetilde{\psi}_i(\cdot - 2k) \big\rangle\,, \qquad i \in 0 : m-1\,, \quad k \in N_1 - 1\,. \tag{3.2}$$

Доказательство. Имеем

$$\Big[\mathcal{F}_N\big(\widetilde{\psi}_i(\cdot - 2k)\big)\Big](l) = \sum_{j=0}^{N-1} \widetilde{\psi}_i(j-2k)\, \omega_N^{-2(j-2k)-2lk} =$$

$$= \omega_N^{-2lk} \sum_{j=0}^{N-1} \widetilde{\psi}_i(j)\, \omega_N^{-lj} = \omega_{N_1}^{-lk}\, \widetilde{g}_i(l)\,.$$

По обобщённому равенству Парсеваля

$$\big\langle x, \widetilde{\psi}_i(\cdot - 2k) \big\rangle = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l)\, \overline{\widetilde{g}_i(l)}\, \omega_{N_1}^{lk}\,. \tag{3.3}$$

Вместе с тем, по определению d_i равны $\mathcal{F}_{N_1}^{-1}(D_i)$, где D_i задаются формулой (2.1), так что

$$d_i(k) = \frac{1}{2N_1} \sum_{l=0}^{N_1-1} \Big[\overline{\widetilde{g}_i(l)}\, X(l) + \overline{\widetilde{g}_i(l+N_1)}\, X(l+N_1)\Big] \omega_{N_1}^{kl} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \overline{\widetilde{g}_i(l)}\, X(l)\, \omega_{N_1}^{kl}\,. \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) следует (3.2). □

На основании предложений 1 и 2 приходим, в частности, к такому заключению: *при выполнении условия совершенной реконструкции* (2.5) *любой сигнал* $x \in \mathbb{C}_N$ *допускает представление*

$$x = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \big\langle x, \widetilde{\psi}_i(j-2k)\big\rangle\, \psi_i(j-2k)\,. \tag{3.5}$$

3.2. Теперь можно ввести пару двойственных фреймов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть выполнено условие совершенной реконструкции* (2.5). *Системы сигналов*

$$\big\{\psi_i(j-2k) \mid k \in 0:N_1-1,\ i \in 0:m-1\big\}\,, \tag{3.6}$$

$$\big\{\widetilde{\psi}_i(j-2k) \mid k \in 0:N_1-1,\ i \in 0:m-1\big\} \tag{3.7}$$

являются фреймами в $\mathbb{C}_N$. *Наряду с разложением* (3.5) *имеет место разложение*

$$x = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \big\langle x, \psi_i(\cdot-2k)\big\rangle\, \widetilde{\psi}_i(\cdot-2k)\,, \qquad x \in \mathbb{C}_N\,. \tag{3.8}$$

Фреймы (3.6) и (3.7) называются *двойственными.*

Доказательство. Разберёмся сначала с системой (3.7). Обозначим

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \big|\big\langle x, \widetilde{\psi}_i(\cdot-2k)\big\rangle\big|^2\,.$$

В силу (3.2) и равенства Парсеваля

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \big|d_i(k)\big|^2 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \big|D_i(k)\big|^2\,.$$

Введём вектор-столбец $D(k) = \big(D_0(k), D_1(k), \dots, D_{m-1}(k)\big)^T$. Согласно определению матрицы $\widetilde{P}(k)$

$$D(k) = \widetilde{P}(k)\, X_k\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,,$$

где $X_k = \big(X(k), X(k+N_1)\big)^T$. При этом

$$\big\|D(k)\big\|^2 = \big\langle \widetilde{P}(k)\, X_k, \widetilde{P}(k)\, X_k \big\rangle = \big\langle (\widetilde{P}(k))^*\, \widetilde{P}(k)\, X_k, X_k \big\rangle\,.$$

Звёздочка означает эрмитово сопряжение.

Из условия совершенной реконструкции (2.5) следует, что $\operatorname{rank} \widetilde{P}(k) = 2$ при всех k. Значит, квадратная матрица второго порядка $\widetilde{H}(k) = \big(\widetilde{P}(k)\big)^*\, \widetilde{P}(k)$ является эрмитовой и положительно определённой. Пусть $0 < \widetilde{\lambda}_1(k) \leqslant \widetilde{\lambda}_2(k)$ её собственные числа. Тогда для величины

$$\widetilde{S}(x) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \big\|D(k)\big\|^2 = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \big\langle \widetilde{H}(k)\, X_k, X_k \big\rangle$$

справедливы оценки

$$\frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N_1-1} \widetilde{\lambda}_1(k)\, \|X_k\|^2 \leqslant \widetilde{S}(x) \leqslant \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N_1-1} \widetilde{\lambda}_2(k)\, \|X_k\|^2\,.$$

Положим

$$\widetilde{A} = 2 \min_{k \in 0:N_1-1} \widetilde{\lambda}_1(k)\,, \quad \widetilde{B} = 2 \max_{k \in 0:N_1-1} \widetilde{\lambda}_2(k)$$

и учтём, что $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_1-1} \|X_k\|^2 = \frac{1}{N} \|X\|^2 = \|x\|^2$. Придём к неравенствам

$$\widetilde{A}\, \|x\|^2 \leqslant \widetilde{S}(x) \leqslant \widetilde{B}\, \|x\|^2.$$

Значит, система (3.7) является фреймом в $\mathbb{C}_N$ с границами $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$.

Утверждение о фреймовости системы (3.6) проверяется аналогично,только нужно поменять местами фильтры анализа и фильтры синтеза.

Итак, пусть теперь $\{g_i\}_{i=0}^{m-1}$ — фильтры анализа, а $\{\widetilde{g}_i\}_{i=0}^{m-1}$ — фильтры синтеза. Тогда формула декомпозиции примет вид

$$D(k) = Q(k)\, X_k\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,,$$

а формула реконструкции запишется так:

$$\big(\widehat{X}(k),\, \widehat{X}(k+N_1)\big)^T = \widetilde{Q}(k)\, D(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Здесь

$$Q(k)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\overline{g_0(k)} & \overline{g_0(k+N_1)}\\ \overline{g_1(k)} & \overline{g_1(k+N_1)}\\ \vdots & \vdots\\ \overline{g_{m-1}(k)} & \overline{g_{m-1}(k+N_1)}\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{Q}(k)=\begin{bmatrix}\widetilde{g}_0(k) & \widetilde{g}_1(k) & \cdots & \widetilde{g}_{m-1}(k)\\ \widetilde{g}_0(k+N_1) & \widetilde{g}_1(k+N_1) & \cdots & \widetilde{g}_{m-1}(k+N_1)\end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $Q(k)=\frac{1}{2}\big(P(k)\big)^*$, $\widetilde{Q}(k)=2\big(\widetilde{P}(k)\big)^*$. Согласно (2.5)

$$\widetilde{Q}(k)\,Q(k)=\big(\widetilde{P}(k)\big)^*\big(P(k)\big)^*=\big[P(k)\,\widetilde{P}(k)\big]^*=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

т. е. для нового банка фильтров также выполнено условие совершенной реконструкции. Отсюда следует справедливость формулы (3.8).

Аналогично предыдущему величина

$$S(x)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{N_1-1}\big|\big\langle x,\psi_i(\cdot-2k)\big\rangle\big|^2$$

преобразуется к виду

$$S(x)=\frac{1}{N_1}\sum_{k=0}^{N_1-1}\big\langle H(k)\,X_k,X_k\big\rangle\,,$$

где $H(k)=\big(Q(k)\big)^*Q(k)$ — эрмитова положительно определённая матрица второго порядка. Пусть $0<\lambda_1(k)\leqslant\lambda_2(k)$ её собственные числа. Положив

$$A=2\min_{k\in 0:N_1-1}\lambda_1(k)\,,\quad B=2\max_{k\in 0:N_1-1}\lambda_2(k)\,,$$

придём к неравенствам

$$A\,\|x\|^2\leqslant S(x)\leqslant B\,\|x\|^2\,.$$

Значит, система (3.6) является фреймом в $\mathbb{C}_N$ с границами A, B.

Предложение доказано. $\square$

4. ФРЕЙМЫ БАТТЕРВОРТА

4.1. Рассмотрим частный случай теории, полезный для цифровой обработки сигналов. По-прежнему считаем, что N — чётное число, $N = 2N_1$.

Пусть $m = 3$. Фильтры анализа будем традиционно обозначать $\widetilde{h}(k)$, $\widetilde{g}_1(k)$, $\widetilde{g}_2(k)$, а фильтры синтеза — $h(k)$, $g_1(k)$, $g_2(k)$. Условия совершенной реконструкции (2.5) перепишутся в виде

$$h(k)\,\widetilde{h}(k) + g_1(k)\,\widetilde{g}_1(k) + g_2(k)\,\widetilde{g}_2(k) = 2\,,\quad k \in 0 : N-1\,,\tag{4.1}$$

$$h(k)\,\overline{\widetilde{h}(k+N_1)} + g_1(k)\,\overline{\widetilde{g}_1(k+N_1)} + g_2(k)\,\overline{\widetilde{g}_2(k+N_1)} = 0\,,\quad k \in 0 : N-1\,.\tag{4.2}$$

С точки зрения цифровой обработки сигналов желательны фильтры, которые являются дробно-рациональными функциями от ω_N^k. Дробно-рациональные фильтры, удовлетворяющие условиям (4.1) и (4.2), можно построить на основе фильтров Баттерворта.

4.2. Возьмём натуральное число $r \geqslant 2$ и положим

$$c = \Big(\cos\frac{k\pi}{N}\Big)^{2r}, \quad s = \Big(\sin\frac{k\pi}{N}\Big)^{2r},$$
$$h(k) = \widetilde{h}(k) = \frac{\sqrt{2}\,c}{c+s}\,, \quad g_1(k) = \widetilde{g}_1(k) = \frac{\sqrt{2}\,s}{c+s}\,.$$

Функция $h(k)$ представляет собой аналог фильтра Баттерворта [6]. Фильтры $g_2(k)$, $\widetilde{g}_2(k)$ в силу (4.1) должны удовлетворять соотношению

$$g_2(k)\,\overline{\widetilde{g}_2(k)} = 2 - \frac{2c^2+2s^2}{(c+s)^2} = \frac{4cs}{(c+s)^2} = \frac{4}{(c+s)^2}\Big(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\Big)^{2r}.\tag{4.3}$$

Получили задачу факторизации: разбить правую часть (4.3) на два множителя $g_2(k)$, $\widetilde{g}_2(k)$ так, чтобы выполнялось условие (4.2).

Выберем два чётных числа p, q, в сумме равных $2r$, $p + q = 2r$. Положим

$$g_2(k) = \omega_N^k\,\frac{2}{c+s}\,\big(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\big)^p, \quad \widetilde{g}_2(k) = \omega_N^k\,\frac{2}{c+s}\,\Big(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\Big)^q.\tag{4.4}$$

В этом случае соотношение (4.3) (а значит, и (4.1)) выполняется. Отметим, что в силу чётности q

$$\overline{\widetilde{g}_2(k+N_1)} = -\omega_N^{-k}\,\frac{2}{c+s}\,\Big(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\Big)^q.$$

Теперь легко проверить, что и соотношение (4.2) выполняется.

При чётном r выделяется вариант $p = q = r$, когда $g_2(k) = \widetilde{g}_2(k)$. Поскольку по условию $h(k) = \widetilde{h}(k)$ и $g_1(k) = \widetilde{g}_1(k)$, то получаем, что фильтры синтеза полностью совпадают с фильтрами анализа. Это приводит к жёсткому фрейму [7].

4.3. Построенные фильтры являются дробно-рациональными функциями от $z = \omega_N^k$, так как

$$4\cos^2 \tfrac{k\pi}{N} = z + 2 + z^{-1}\,, \quad 4\sin^2 \tfrac{k\pi}{N} = -z + 2 - z^{-1}\,.$$

В случае дробно-рациональных фильтров декомпозицию и реконструкцию сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ можно осуществить за $O(N)$ операций. Подробнее об этом в [6].

4.4. Очевидно, что сигналы h и g_1 вещественные и чётные. Поэтому вейвлеты $\varphi = \mathcal{F}_N^{-1}(h)$ и $\psi = \mathcal{F}_N^{-1}(g_1)$ чётные и вещественные (рис. 1).

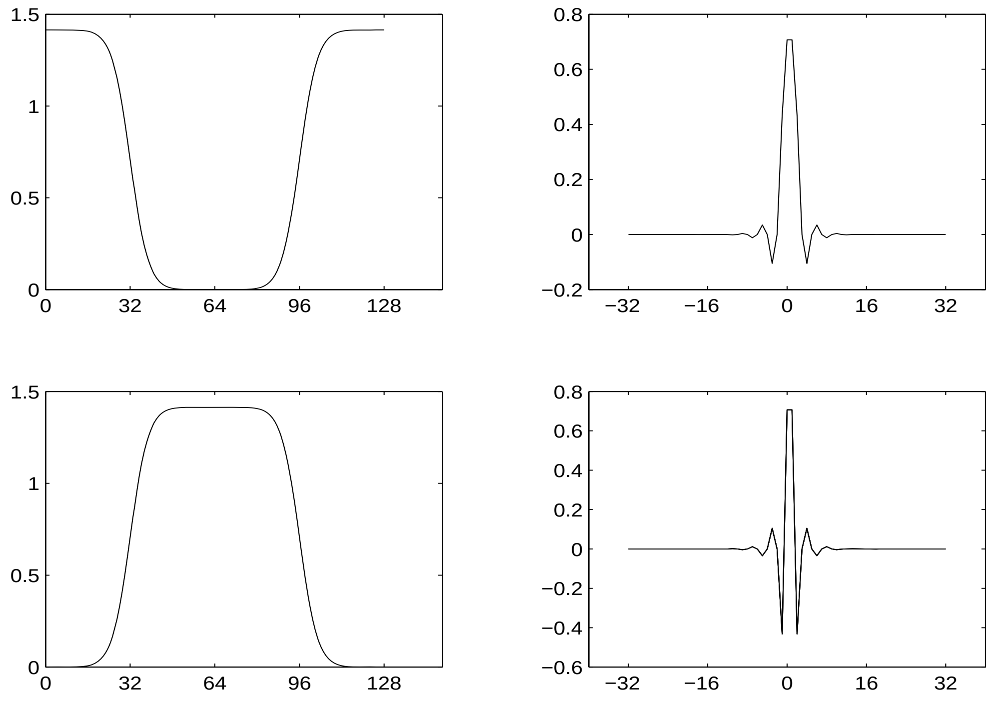


Рис. 1. Фильтры h, g_1 (слева) и соответствующие им вейвлеты φ, ψ (справа) при $r = 3$, $N = 128$.

Сигналы (4.4) являются чётными. Например, для g_2 в силу чётности p имеем

$$g_2(-k) = \omega_N^{-k}\,\frac{2}{c+s}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\right)^p = \overline{g_2(k)}\,.$$

Как следствие, вейвлеты $\theta = \mathcal{F}_N^{-1}(g_2)$ и $\widetilde{\theta} = \mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{g}_2)$ будут вещественными.

Рассмотрим вопрос о симметричности вейвлетов $\theta(j)$ и $\widetilde{\theta}(j)$. Фильтр

$$\widehat{g}_p(k) = \frac{2}{c+s}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\right)^p$$

при чётном p вещественный и чётный. Поэтому соответствующий вейвлет $\theta_p = \mathcal{F}_N^{-1}(\widehat{g}_p)$ — чётный и вещественный.

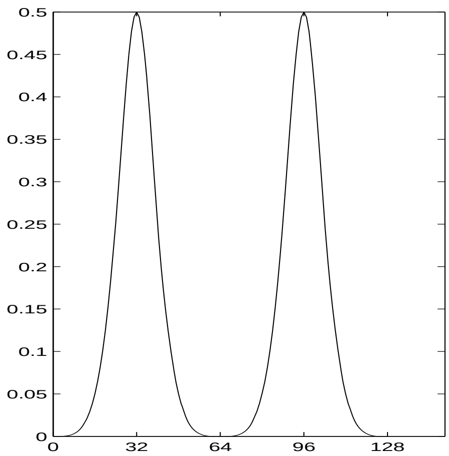
Наличие множителя ω_N^k приводит к сдвигу на одну позицию. Для вейвлетов $\theta(j)$ и $\widetilde{\theta}(j)$ имеем

$$\theta(j) = \theta_p(j+1)\,, \quad \widetilde{\theta}(j) = \theta_q(j+1)\,.$$

Эти вейвлеты вещественны и имеют ось симметрии $j = -1$.

На рис. 2 приведены графики фильтра $\widehat{g}_p$ и соответствующего вейвлета θ_p при $r = 3$, $p = 4$ и $N = 128$.

Отметим, что фильтр $\widehat{g}_p(k)$ при чётном p имеет период N_1.



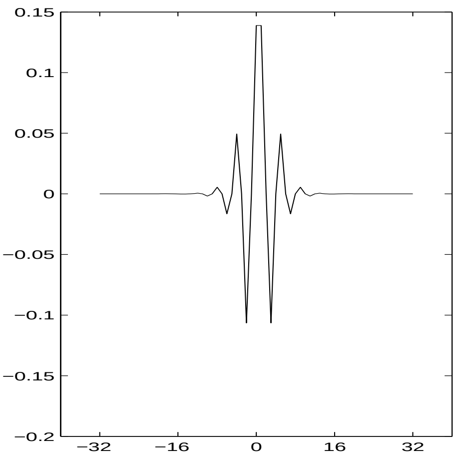


Рис. 2. Фильтр $\widehat{g}_p$ (слева) и вейвлет θ_p (справа) при $r = 3$, $p = 4$ и $N = 128$.

4.5. Согласно (3.5) для любого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ справедливо разложение

$$x = \sum_{k=0}^{N_1-1} \bigl\langle x, \varphi(\cdot - 2k)\bigr\rangle\, \varphi(\cdot - 2k) + \sum_{k=0}^{N_1-1} \bigl\langle x, \psi(\cdot - 2k)\bigr\rangle\, \psi(\cdot - 2k) + \\ + \sum_{k=0}^{N_1-1} \bigl\langle x, \widetilde{\theta}(\cdot - 2k)\bigr\rangle\, \theta(\cdot - 2k)\,,$$

а также аналогичное разложение, в котором θ и $\widetilde{\theta}$ меняются местами.

По аналогии с вейвлетным преобразованием сигналов фреймовое преобразование может быть распространено на более грубые уровни разрешения. Это достигается путём итеративного применения описанного выше преобразования к низкочастотному блоку коэффициентов, начиная с $d_0(k) = \big\langle x, \varphi(\cdot - 2k)\big\rangle$, $k \in 0 : N_1 - 1$. В результате придём к многоуровневому разложению сигнала.

4.6. При каждом выборе чётных натуральных чисел p, q, $p + q = 2r$, получаются исходный фрейм $\{\varphi, \psi, \theta\}$ и двойственный фрейм $\{\varphi, \psi, \widetilde{\theta}\}$. Можно точно вычислить границы этих фреймов. Пусть для определённости $p \geqslant q$. Тогда $p \geqslant r \geqslant q$. Дополнительно будем предполагать, что $N_2 = N/4$ — целое число.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Величины*

$$A = 2^{2r-2p}\,, \quad B = 1 \quad \text{и} \quad \widetilde{A} = 1\,, \quad \widetilde{B} = 2^{2r-2q} \tag{4.5}$$

являются границами фреймов $\{\varphi, \psi, \theta\}$ *и* $\{\varphi, \psi, \widetilde{\theta}\}$ *соответственно.*

Доказательство. Для фрейма $\{\varphi, \psi, \theta\}$ имеем

$$H(k) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} h(k) & g_1(k) & g_2(k) \\ h(k+N_1) & g_1(k+N_1) & g_2(k+N_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{h(k)} & \overline{h(k+N_1)} \\ \overline{g_1(k)} & \overline{g_1(k+N_1)} \\ \overline{g_2(k)} & \overline{g_2(k+N_1)} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a(k) & b(k) \\ b(k) & a(k) \end{bmatrix},$$

где

$$a(k) = \tfrac{1}{4}\Big[\big|h(k)\big|^2 + \big|g_1(k)\big|^2 + \big|g_2(k)\big|^2\Big] = \frac{c^2 + s^2 + 2\big(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\big)^{2p}}{2(c+s)^2}\,,$$
$$b(k) = \tfrac{1}{4}\Big[h(k)\,\overline{h(k+N_1)} + g_1(k)\,\overline{g_1(k+N_1)} + g_2(k)\,\overline{g_2(k+N_1)}\Big] =$$
$$= \frac{c\,s - \big(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\big)^{2p}}{(c+s)^2}\,.$$

Поскольку $c\,s = \big(\cos\frac{k\pi}{N}\sin\frac{k\pi}{N}\big)^{2r} = \big(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\big)^{2r}$, то

$$b(k) = \frac{\big(\frac{1}{4}\sin^2\frac{2k\pi}{N}\big)^r - \big(\frac{1}{4}\sin^2\frac{2k\pi}{N}\big)^p}{\Big(\big(\cos^2\frac{k\pi}{N}\big)^r + \big(\sin^2\frac{k\pi}{N}\big)^r\Big)^2}\,. \tag{4.6}$$

По условию $p \geqslant r$, так что $b(k) \geqslant 0$. Очевидно, что $a(k) > 0$.

Собственными числами матрицы $H(k)$ являются

$$\lambda_1(k) = a(k) - b(k)\,, \quad \lambda_2(k) = a(k) + b(k)\,.$$

Принимая во внимание тождество $a(k) + b(k) \equiv \frac{1}{2}$, получаем

$$B := 2 \max_{k\in 0:N_1-1} \lambda_2(k) = 1\,.$$

Далее,

$$\lambda_1(k) = \bigl(a(k) + b(k)\bigr) - 2b(k) = \tfrac{1}{2} - 2b(k)\,. \tag{4.7}$$

Значит, минимизация $\lambda_1(k)$ сводится к максимизации N_1-периодической функции $b(k)$ при $p \geqslant r$. Покажем, что

$$\max_{k\in 0:N_1-1} b(k) = \tfrac{1}{4}(1 - 2^{2r-2p})\,. \tag{4.8}$$

При $p = r$ это очевидно (см. (4.6)). Будем считать, что $p > r$.

Рассмотрим функцию $u(t) = t^r - t^p$. Её производная $u'(t) = t^{r-1}\,(r - p\,t^{p-r})$ имеет единственный положительный корень $t_0 = (r/p)^{1/(p-r)}$ и положительна на $(0, t_0)$. Нас интересует $u(t)$ на отрезке $[0, \frac{1}{4}]$. Проверим, что $\frac{1}{4} < t_0$. Отсюда будет следовать, что $u(t)$ на $[0, \frac{1}{4}]$ строго возрастает.

Неравенство $t_0 > \frac{1}{4}$ равносильно следующему

$$r\left(\tfrac{1}{4}\right)^r > p\left(\tfrac{1}{4}\right)^p. \tag{4.9}$$

Функция $\xi(t) = t\left(\frac{1}{4}\right)^t$ имеет производную $\xi'(t) = \xi(t)\bigl(\frac{1}{t} - \ln 4\bigr)$, которая отрицательна при $t \geqslant 1$. Это гарантирует справедливость неравенства (4.9). Установлено, в частности, что $u(t)$ достигает максимального значения на $[0, \frac{1}{4}]$ в единственной точке $t = \frac{1}{4}$.

Согласно (4.6) числитель дроби $b(k)$ равен $u\bigl(\frac{1}{4}\sin^2\frac{2k\pi}{N}\bigr)$. По доказанному он достигает наибольшего значения на $0 : N_1 - 1$ только при $k = N_2 = N_1/2$. Как мы сейчас выясним, на этом же индексе достигается наименьшее значение знаменателя дроби $b(k)$. Отсюда будет следовать, что $k = N_2$ — единственный индекс из $0 : N_1 - 1$, на котором достигается максимум самой дроби $b(k)$.

Рассмотрим функцию $v(t) = \bigl((1-t)^r + t^r\bigr)^2$. Её производная

$$v'(t) = 2r\bigl((1-t)^r + t^r\bigr)\bigl(-(1-t)^{r-1} + t^{r-1}\bigr)$$

обращается в ноль при $t = \frac{1}{2}$, отрицательна на $[0, \frac{1}{2})$ и положительна на $(\frac{1}{2}, 1]$. Значит, $v(t)$ достигает наименьшего значения на $[0, 1]$ в единственной точке $t = \frac{1}{2}$. Знаменатель дроби $b(k)$ равен $v\bigl(\sin^2\frac{2k\pi}{N}\bigr)$. Он достигает наименьшего значения на $0 : N_1 - 1$ только при $k = N_2$.

Доказано, что максимум дроби $b(k)$ на $0 : N_1 - 1$ достигается на единственном индексе $k = N_2$. При этом

$$b(N_2) = \frac{2^{-2r} - 2^{-2p}}{2^{-2r+2}} = \tfrac{1}{4}(1 - 2^{2r-2p})\,.$$

Соотношение (4.8) установлено.

На основании (4.7) и (4.8) получаем

$$A = 2 \min_{k \in 0:N_1-1} \lambda_1(k) = 1 - 4 \max_{k \in 0:N_1-1} b(k) = 2^{2r-2p}\,.$$

Границы фрейма $\{\varphi, \psi, \theta\}$ вычислены.

Обратимся к двойственному фрейму $\{\varphi, \psi, \widetilde{\theta}\}$. Вычисление его границ проводится по той же схеме с заменой p на q. Отличие заключается в том, что вместо неравенства $p \geqslant r$ выполняется неравенство $q \leqslant r$.

Собственными числами матрицы $\widetilde{H}(k)$ являются

$$\widetilde{\lambda}_1(k) = \widetilde{a}(k) + \widetilde{b}(k)\,, \quad \widetilde{\lambda}_2(k) = \widetilde{a}(k) - \widetilde{b}(k)\,,$$

где

$$\widetilde{a}(k) = \frac{c^2 + s^2 + 2\bigl(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\bigr)^{2q}}{2(c+s)^2}\,,$$

$$\widetilde{b}(k) = \frac{c\,s - \bigl(\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{N}\bigr)^{2q}}{(c+s)^2} = -\frac{\bigl(\frac{1}{2}\sin^2\frac{2k\pi}{N}\bigr)^{2q} - \bigl(\frac{1}{2}\sin^2\frac{2k\pi}{N}\bigr)^{2r}}{\Bigl(\bigl(\cos^2\frac{k\pi}{N}\bigr)^r + \bigl(\sin^2\frac{k\pi}{N}\bigr)^r\Bigr)^2}\,.$$

Очевидно, что $b(k) \leqslant 0$. Поскольку $\widetilde{a}(k) + \widetilde{b}(k) \equiv \frac{1}{2}$, то

$$\widetilde{A} = 2 \min_{k \in 0:N_1-1} \widetilde{\lambda}_2(k) = 1\,.$$

Далее,

$$\widetilde{\lambda}_2(k) = \bigl(\widetilde{a}(k) + \widetilde{b}(k)\bigr) - 2\widetilde{b}(k) = \tfrac{1}{2} + 2\bigl(-\widetilde{b}(k)\bigr)\,.$$

Аналогично (4.8)

$$\max_{k \in 0:N_1-1} \bigl\{-b(k)\bigr\} = \tfrac{1}{4}(2^{2r-2q} - 1)\,.$$

Поэтому

$$\widetilde{B} = 2 \max_{k \in 0:N_1-1} \widetilde{\lambda}_2(k) = 1 + 4 \max_{k \in 0:N_1-1} \bigl\{-b(k)\bigr\} = 2^{2r-2q}\,.$$

Предложение доказано. $\square$

Отметим, что согласно (4.5) и равенству $p + q = 2r$ границы двойственных фреймов Баттерворта связаны соотношениями

$$\widetilde{A} = 1/B\,, \quad \widetilde{B} = 1/A\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.

2. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. *Основы теории всплесков* // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 6 (324). С. 53–128.

3. Cvetković Z., Vetterli M. *Oversampled filter banks* // IEEE Trans. Sign. Proc. 1998. V. 46. No. 5. P. 1245–1255.

4. Averbuch A. Z., Zheludev V. A., Cohen T. *Interpolatory frames in signal spaces* // IEEE Trans. Sign. Proc. 2006. V. 54. No. 6. P. 2126-2139.

5. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Части 1–3. СПб.: НИИММ, 2003. 288 с.

6. Жёлудев В. А., Певный А. Б. *Вейвлетное преобразование Баттерворта и его реализация с помощью рекурсивных фильтров* // Журн. выч. мат. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 4. С. 607–618.

7. Жёлудев В. А., Певный А. Б. *Дискретные периодические фреймы* // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. 6. С. 87–94.