ПОЛЕ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ БЕЗЬЕ*

М. И. Григорьев В. Н. Малозёмов
m_grigoriev@list.ru malv@math.spbu.ru

24 марта 2007 г.

1°. Возьмём на плоскости четыре точки P_0, P_1, P_2, P_3, такие, что $P_3 = P_0$ и P_0, P_1, P_2 не лежат на одной прямой. Зафиксируем положительные веса w_0, w_1, w_2, w_3. По указанным данным построим дробно-рациональную (проективную) кривую Безье третьего порядка [1, с. 227–230]:

$$R_0(u) = \frac{w_0\,(1-u)^3\,P_0 + 3\,w_1\,(1-u)^2\,u\,P_1 + 3\,w_2\,(1-u)\,u^2\,P_2 + w_3\,u^3\,P_3}{w_0\,(1-u)^3 + 3\,w_1\,(1-u)^2\,u + 3\,w_2\,(1-u)\,u^2 + w_3\,u^3}\,. \qquad (1)$$

Поскольку $R_0(0) = P_0$, $R_0(1) = P_3$ и $P_0 = P_3$, то кривая $R_0(u)$ при $u \in [0,1]$ является замкнутой.

Введём числа

$$\mu_0 = \frac{w_0\,w_2}{w_1^2}\,, \qquad \mu_1 = \frac{w_1\,w_3}{w_2^2}$$

и рассмотрим ещё одну проективную кривую Безье

$$R_1(t) = \frac{\big(\mu_0\,(1-t)^3 + \mu_1\,t^3\big)\,P_0 + 3\,(1-t)\,t\,\big[(1-t)\,P_1 + t\,P_2\big]}{\mu_0\,(1-t)^3 + \mu_1\,t^3 + 3\,(1-t)\,t}\,, \quad t \in [0,1]. \qquad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо равенство множеств*

$$\big\{R_0(u)\,|\,u \in [0,1]\big\} = \big\{R_1(t)\,|\,t \in [0,1]\big\}. \qquad (3)$$

Доказательство. Обозначим множества, стоящие в левой и правой частях равенства (3), через $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ соответственно. Проверим сначала, что $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}_1$.

Если $P \in \mathfrak{B}_0$, то существует $u \in [0,1]$, такое, что $P = R_0(u)$. Положим $\rho = w_2/w_1$ и

$$t = \frac{\rho\,u}{\rho\,u + (1-u)}\,. \qquad (4)$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Очевидно, что $t \in [0,1]$. При этом

$$u = \frac{t}{t + \rho\,(1-t)}\,. \tag{5}$$

Подставив (5) в (1), получим

$$P = \frac{w_0\,\rho^3\,(1-t)^3\,P_0 + 3\,w_1\,\rho^2\,(1-t)^2\,t\,P_1 + 3\,w_2\,\rho\,(1-t)\,t^2\,P_2 + w_3\,t^3\,P_3}{w_0\,\rho^3\,(1-t)^3 + 3\,w_1\,\rho^2\,(1-t)^2\,t + 3\,w_2\,\rho\,(1-t)\,t^2 + w_3\,t^3}\,. \tag{6}$$

Отметим, что

$$w_0\,\rho^3 = \frac{w_0\,w_2^3}{w_1^3}\,, \qquad w_1\,\rho^2 = w_2\,\rho = \frac{w_2^2}{w_1}\,.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби из правой части (6) на w_1/w_2^2. Учитывая, что $P_3 = P_0$, приходим к представлению $P = R_1(t)$. Включение $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}_1$ установлено.

Аналогично проверяется обратное включение. Пусть $P = R_1(t)$ при некотором $t \in [0,1]$. Сделаем замену переменной (4). Получим

$$P = \frac{\mu_0\,(1-u)^3\,P_0 + 3\,\rho\,(1-u)^2\,u\,P_1 + 3\,\rho^2\,(1-u)\,u^2\,P_2 + \mu_1\,\rho^3\,u^3\,P_3}{\mu_0\,(1-u)^3 + 3\,\rho\,(1-u)^2\,u + 3\,\rho^2\,(1-u)\,u^2 + \mu_1\,\rho^3\,u^3}\,.$$

Умножим числитель и знаменатель последней дроби на w_1^2/w_2. Вспоминая определения μ_0, μ_1 и ρ, приходим к представлению $P = R_0(u)$, где $u \in [0,1]$. Это означает, что $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_0$.

Предложение доказано. $\square$

Согласно предложению 1, любую проективную кривую Безье третьего порядка (1) в случае $P_3 = P_0$ можно привести к стандартной форме (2), зависящей от двух положительных параметров μ_0 и μ_1.

2°. В дальнейшем будем рассматривать кривые Безье в стандартной форме (2). Пусть $P = R_1(t)$ при некотором $t \in [0,1]$. Обозначим $\mu(t) = \mu_0\,(1-t)^3 + \mu_1\,t^3 + 3\,(1-t)t$,

$$\lambda_0 = \frac{\mu_0\,(1-t)^3 + \mu_1\,t^3}{\mu(t)}\,, \quad \lambda_1 = \frac{3\,(1-t)^2\,t}{\mu(t)}\,, \quad \lambda_2 = \frac{3\,(1-t)\,t^2}{\mu(t)}\,.$$

Тогда

$$P = \lambda_0\,P_0 + \lambda_1\,P_1 + \lambda_2\,P_2\,, \tag{7}$$

причём коэффициенты λ_0, λ_1, λ_2 неотрицательны и в сумме равны единице. Такие коэффициенты называются *барицентрическими координатами* точки P относительно точек P_0, P_1, P_2. Из (7), в частности, следует, что кривая Безье $\mathfrak{B}_1 = \big\{R_1(t)\,|\,t \in [0,1]\big\}$ лежит в треугольнике $P_0P_1P_2$.

Вернёмся к точке P и покажем, что её барицентрические координаты удовлетворяют условию
$$3\,\lambda_0\,\lambda_1\,\lambda_2 = \mu_0\,\lambda_1^3 + \mu_1\,\lambda_2^3\,. \tag{8}$$
Действительно,
$$3\,\lambda_0\,\lambda_1\,\lambda_2 = \frac{27\left[\mu_0\,(1-t)^3 + \mu_1\,t^3\right](1-t)^3\,t^3}{[\mu(t)]^3} =$$
$$= \mu_0\left[\frac{3\,(1-t)^2\,t}{\mu(t)}\right]^3 + \mu_1\left[\frac{3\,(1-t)\,t^2}{\mu(t)}\right]^3 = \mu_0\,\lambda_1^3 + \mu_1\,\lambda_2^3\,.$$
Если наряду с множеством $\mathfrak{B}_1$ ввести множество $\mathfrak{B}_2$ точек P вида (7), барицентрические координаты которых удовлетворяют условию (8), то, по существу, установлено, что $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$. Проверим обратное включение $\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_1$.

Возьмём точку P из $\mathfrak{B}_2$ с барицентрическими координатами $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то $P = P_0$, так что $P \in \mathfrak{B}_1$. Варианты $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ невозможны в силу (8). Остаётся рассмотреть случай $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (в силу (8) и $\lambda_0 > 0$). Положим $t_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$. Очевидно, что $t_0 \in (0, 1)$. Покажем, что $P = R_1(t_0)$. Этим завершится доказательство включения $\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_1$.

Имеем
$$\mu_0\,(1-t_0)^3 + \mu_1\,t_0^3 = \mu_0\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^3 + \mu_1\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^3 = \frac{3\,\lambda_0\,\lambda_1\,\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^3}\,,$$
$$3\,(1-t_0)\,t_0 = \frac{3\,\lambda_1\,\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}\,,$$
поэтому
$$\mu(t_0) = \frac{3\,\lambda_1\,\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_2} + 1\right) = \frac{3\,\lambda_1\,\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^3}\,.$$
Далее,
$$\frac{\mu_0\,(1-t_0)^3 + \mu_1\,t_0^3}{\mu(t_0)} = \lambda_0, \quad \frac{3\,(1-t_0)^2\,t_0}{\mu(t_0)} = \lambda_1, \quad \frac{3\,(1-t_0)\,t_0^2}{\mu(t_0)} = \lambda_2.$$
Равенство (7) принимает требуемый вид $P = R_1(t_0)$.

Доказаны включения $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_1$, которые гарантируют, что $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$. Полученный результат можно сформулировать так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Замкнутая проективная кривая Безье третьего порядка в стандартной форме* (2) *в барицентрических относительно точек* P_0, P_1, P_2 *координатах определяется неявным уравнением*
$$\mu_0\,\lambda_1^3 + \mu_1\,\lambda_2^3 - 3\,\lambda_0\,\lambda_1\,\lambda_2 = 0.$$

3°. Внутри треугольника $P_0P_1P_2$ зафиксируем точку P_* с положительными барицентрическими координатами $(\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$. Легко понять, как построить кривую Безье вида (2), проходящую через P_*. Для этого нужно выбрать положительные параметры μ_0, μ_1 кривой $R_1(t)$ так, чтобы они удовлетворяли линейному уравнению

$$(\lambda_1^*)^3\mu_0 + (\lambda_2^*)^3\mu_1 = 3\,\lambda_0^*\,\lambda_1^*\,\lambda_2^*\,.$$

Перебирая все такие пары параметров (μ_0, μ_1), построим поле замкнутых кривых Безье третьего порядка, проходящих через точку P_* (см. рис. 1). Более того, для любой кривой $R_1(t)$ из этого поля выполняется равенство $R_1(t_*) = P_*$, где аргумент $t_* = \frac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*+\lambda_2^*}$ одинаков для всех допустимых μ_0, μ_1.

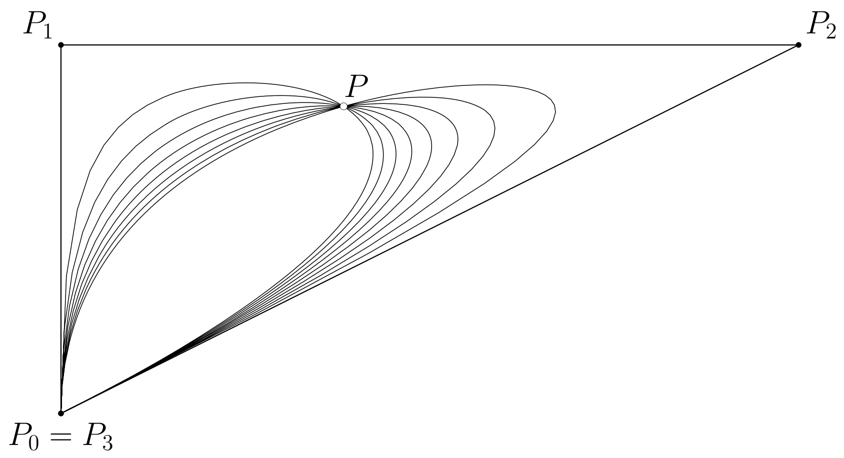

Рис. 1

4°. Рассмотрим внутри треугольника $P_0P_1P_2$ две различные точки P_*, Q_* с положительными барицентрическими координатами $(\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ и $(\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$ соответственно. Поставим задачу: провести через эти точки кривую Безье вида (2).

Предложение 2 позволяет сформулировать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для того чтобы кривая Безье вида* (2) *проходила через точки P_* и Q_*, необходимо и достаточно, чтобы система линейных уравнений*

$$\begin{aligned}(\lambda_1^*)^3\mu_0 + (\lambda_2^*)^3\mu_1 &= 3\,\lambda_0^*\,\lambda_1^*\,\lambda_2^*,\\ (\beta_1^*)^3\mu_0 + (\beta_2^*)^3\mu_1 &= 3\,\beta_0^*\,\beta_1^*\,\beta_2^*\end{aligned} \tag{9}$$

имела положительное решение.

Покажем, что система (9) не имеет положительного решения, если

$$\frac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*} = \frac{\beta_2^*}{\beta_1^*} =: k. \tag{10}$$

Допустим противное. В таком случае при некоторых положительных μ_0, μ_1 выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_1^* \left(\mu_0 + k^3 \mu_1\right) &= 3\, k \left(1 - (1+k)\, \lambda_1^*\right), \\ \beta_1^* \left(\mu_0 + k^3 \mu_1\right) &= 3\, k \left(1 - (1+k)\, \beta_1^*\right). \end{aligned}$$

Поделив первое из них на второе, последовательно получим $\lambda_1^* = \beta_1^*$, $\lambda_2^* = \beta_2^*$, $\lambda_0^* = \beta_0^*$. Но это противоречит тому, что P_*, Q_* – различные точки.

При выполнении условия $\lambda_2^*/\lambda_1^* \neq \beta_2^*/\beta_1^*$ система (9) имеет единственное решение. Если это решение положительно, то через точки P_*, Q_* кривую Безье вида (2) провести можно (см. рис. 2).

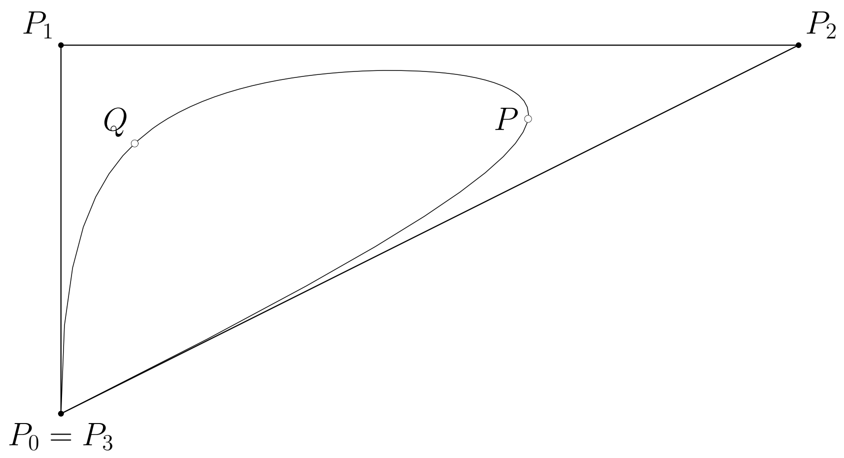

Рис. 2

5°. Условие (10) означает, что точки P_0, P_*, Q_* лежат на одной прямой. Чтобы разобраться в этом, обратимся к общему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Зафиксируем* $k \in (0, +\infty)$ *и положим* $t_0 = \frac{k}{k+1}$,

$$Q = (1 - t_0)\, P_1 + t_0\, P_2.$$

Тогда точки, барицентрические координаты $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ *которых удовлетворяют соотношению*

$$\lambda_2 = k\, \lambda_1, \qquad \lambda_1 \in \left[0, \tfrac{1}{k+1}\right],$$

заполняют отрезок $[P_0, Q]$ *(см. рис.* 3*).*

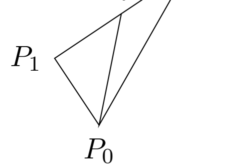

Рис. 3

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нас интересуют точки P вида

$$P = \lambda_0 \, P_0 + \lambda_1 \, P_1 + k \, \lambda_1 \, P_2.$$

Обозначим $s_0 = 1-\lambda_0$. Очевидно, что $s_0 = (1+k)\,\lambda_1$. По условию λ_1 изменяется от 0 до $\frac{1}{k+1}$, поэтому s_0 изменяется от 0 до 1.

Имеем

$$\begin{aligned} P = (1-s_0)\,P_0 + s_0\,\left[\tfrac{1}{1+k}\,P_1 + \tfrac{k}{k+1}\,P_2\right] = \\ = (1-s_0)\,P_0 + s_0\,\big[(1-t_0)\,P_1 + t_0\,P_2\big] = (1-s_0)\,P_0 + s_0\,Q. \end{aligned} \tag{11}$$

Как отмечалось, s_0 изменяется от 0 до 1. Значит, точки P вида (11) заполняют отрезок $[P_0, Q]$. Предложение доказано. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Farin G. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. San Diego: Academic Press, 2002.