ЧАСТОТНЫЙ КОНВЕРТЕР*

В. Н. Малозёмов, С. В. Рыбин

malv@gamma.math.spbu.ru rsvvm2leti@yandex.ru

24 мая 2005 г.

1°. Пусть N_1, N_2 – натуральные числа, отличные от единицы, причем $N_1 \neq N_2$. Обозначим $n = \min\{N_1, N_2\},\ N = N_1 N_2$.

Возьмем сигнал $x \in \mathbb{C}_{N_1}$ со спектром $X = \mathcal{F}_{N_1}(x)$ и преобразуем его в сигнал $y \in \mathbb{C}_{N_2}$, спектр которого $Y = \mathcal{F}_{N_2}(y)$ определяется формулой

$$Y(k) = \begin{cases} X(k) & \text{при } k \in 0 : n-1, \\ 0 & \text{при } k \in n : N_2 - 1. \end{cases}$$

Сигнал y можно записать в явном виде

$$y(j) = \frac{1}{N_2} \sum_{k=0}^{n-1} X(k)\, \omega_{N_2}^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Оператор $\mathcal{K} : \mathbb{C}_{N_1} \to \mathbb{C}_{N_2}$, сопоставляющий сигналу $x \in \mathbb{C}_{N_1}$ сигнал $y \in \mathbb{C}_{N_2}$ вида (1), называется *частотным конвертером*. Покажем, как реализовать оператор $\mathcal{K}$ во временной области.

2°. Реализация состоит из трех этапов.

1) **Растяжение**. Растянем сигнал $x \in \mathbb{C}_{N_1}$ до сигнала $\widehat{x} \in \mathbb{C}_N$ по правилу

$$\widehat{x}(j) = \begin{cases} x(j/N_2), & \text{если } j \text{ делится на } N_2, \\ 0 & \text{при остальных } j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2) **Фильтрация**. Отфильтруем сигнал $\widehat{x}$ с помощью фильтра $\mathcal{L}$, импульсная характеристика h которого имеет спектр $H = \mathcal{F}_N(h)$ вида

$$H(k) = \begin{cases} N_1 & \text{при } k \in 0 : n-1, \\ 0 & \text{при } k \in n : N-1. \end{cases}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Получим сигнал $\widehat{y} = \mathcal{L}(\widehat{x}) = h * \widehat{x}$.

3) **Прореживание**. Выделим сигнал $y(j) = \widehat{y}(jN_1)$, принадлежащий пространству $\mathbb{C}_{N_2}$.

Проверим, что сигнал y допускает представление (1).

3°. Обозначим $\widehat{X} = \mathcal{F}_N(\widehat{x})$. Согласно определению ДПФ

$$\widehat{X}(k) = \sum_{l=0}^{N_1-1} x(l)\,\omega_N^{-klN_2} = \sum_{l=0}^{N_1-1} x(l)\,\omega_{N_1}^{-kl} = X(k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

По теореме о циклической свертке $\widehat{Y} := \mathcal{F}_N(\widehat{y}) = H\widehat{X}$, так что

$$\widehat{Y}(k) = \begin{cases} N_1 X(k) & \text{при } k \in 0 : n-1, \\ 0 & \text{при } k \in n : N-1. \end{cases} \tag{2}$$

Теперь выясним, как связаны спектры сигнала $\widehat{y}$ и прореженного сигнала $y(j) = \widehat{y}(jN_1)$. Запишем

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{j=0}^{N_2-1} y(j)\,\omega_{N_2}^{-kj} = \sum_{j=0}^{N_2-1} \widehat{y}(jN_1)\,\omega_{N_2N_1}^{-kjN_1} = \\ &= \sum_{j'=0}^{N-1} \widehat{y}(j')\,\omega_N^{-kj'}\,\delta_{N_1}(j') = \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{y}(j)\,\omega_N^{-kj} \left\{ \frac{1}{N_1} \sum_{p=0}^{N_1-1} \omega_{N_1N_2}^{-pjN_2} \right\} = \\ &= \frac{1}{N_1} \sum_{p=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{y}(j)\,\omega_N^{-j(k+pN_2)} = \frac{1}{N_1} \sum_{p=0}^{N_1-1} \widehat{Y}(k+pN_2). \end{aligned}$$

Согласно (2) в последней сумме при $k \in 0 : N_2 - 1$ отлично от нуля лишь одно слагаемое, соответствующее $p = 0$. Значит,

$$Y(k) = \frac{1}{N_1}\widehat{Y}(k) = \begin{cases} X(k) & \text{при } k \in 0 : n-1, \\ 0 & \text{при } k \in n : N_2 - 1. \end{cases}$$

Представление (1) следует из формулы обращения для ДПФ.

4°. Обратимся к фильтру $\mathcal{L}$ с импульсной характеристикой

$$h(j) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\,\omega_N^{kj} = \frac{1}{N_2} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_N^{kj}.$$

Обозначим $m = \max\{N_1, N_2\}$, так что $N = mn$. Очевидно, что $h(0) = n/N_2$ и

$$h(j) = \frac{1 - \omega_N^{nj}}{N_2(1 - \omega_N^j)} = \frac{1 - \omega_m^j}{N_2(1 - \omega_N^j)}, \qquad j \in 1 : N-1. \tag{3}$$

Упростим формулу (3). Поскольку

$$1-\omega_m^j = (1-\cos(2\pi j/m)) - i\sin(2\pi j/m) =$$
$$= -2i\sin(\pi j/m)\,[\cos(\pi j/m) + i\sin(\pi j/m)] = -2i\sin(\pi j/m)\,\omega_{2m}^j$$

и аналогично

$$1-\omega_N^j = -2i\sin(\pi j/N)\,\omega_{2N}^j,$$

то при $j \in 1 : N-1$

$$N_2 h(j) = \frac{\sin(\pi j/m)\,\omega_{2m}^j}{\sin(\pi j/N)\,\omega_{2N}^j} = \frac{\sin(\pi j/m)}{\sin(\pi j/N)}\omega_{2N}^{(n-1)j}.$$

Окончательно получаем

$$h(j) = \begin{cases} n/N_2 & \text{при } j = 0, \\ \dfrac{\sin(\pi j/m)}{N_2\sin(\pi j/N)}\omega_{2N}^{(n-1)j} & \text{при } j \in 1 : N-1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. *Цифровая обработка сигналов*. СПб.: Политехника, 2002. Часть 2, глава 6.

2. Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа* СПб.: НИИММ, 2003. Часть 1.