ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЁННЫХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА*

М. И. Григорьев — m_grigoriev@list.ru

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

25 июня 2008 г.

1°. Напомним, что базисные полиномы Бернштейна

$$b_k^n(x) = C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k}, \qquad k \in 0:n,$$

можно определить с помощью производящей функции:

$$\big[xy + (1-x)\big]^n = \sum_{k=0}^{n} b_k^n(x)\, y^k.$$

В. С. Виденский рассмотрел более общую производящую функцию и ввёл обобщённые полиномы Бернштейна $p_k^n(x)$ [1, с. 39]:

$$g_n(x,y) := \prod_{i=1}^{n} \big[h_i(x)\, y + \big(1 - h_i(x)\big)\big] = \sum_{k=0}^{n} p_k^n(x)\, y^k. \tag{1}$$

Здесь $h_1(x), \ldots, h_n(x) : [0,1] \to [0,1]$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$h_i(0) = 0, \qquad h_i(1) = 1 \qquad \text{при всех } i \in 1:n. \tag{2}$$

Приведём некоторые свойства базисных полиномов $p_k^n(x)$ при фиксированном n. Согласно (1)

$$\begin{aligned} &p_k^n(x) \geqslant 0 \text{ на } [0,1] \text{ при всех } k \in 0:n;\\ &\sum_{k=0}^{n} p_k^n(x) \equiv 1. \end{aligned} \tag{3}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

В силу (2)

$$
\begin{aligned}
&p_k^n(0) = 0, \quad k \in 1:n; \qquad\qquad p_0^n(0) = 1;\\
&p_k^n(1) = 0, \quad k \in 0:n-1; \qquad\quad p_n^n(1) = 1.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Покажем, что

$$
\sum_{k=0}^{n} \tfrac{k}{n}\, p_k^n(x) = \varphi_n(x), \qquad x \in [0,1], \tag{5}
$$

где

$$
\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i(x).
$$

Для этого продифференцируем $\ln g_n(x,y)$ по y, после чего положим $y = 1$. Получим

$$
\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, p_k^n(x),
$$

что равносильно (5).

2°. Зафиксируем $x \in (0,1)$ и рассмотрим треугольный массив $\big\{p_k^j(x)\big\}$, $k \in 0:j,\ j \in 0:n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$
\begin{aligned}
&p_k^j = \big(1 - h_j(x)\big)\, p_k^{j-1} + h_j(x)\, p_{k-1}^{j-1}, \qquad k \in 1:j-1; \quad j \in 2:n;\\
&p_0^j = \big(1 - h_j(x)\big)\, p_0^{j-1}, \qquad p_j^j = h_j(x)\, p_{j-1}^{j-1}, \qquad j \in 1:n;\\
&p_0^0 = 1.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению

$$
\prod_{i=1}^{j} \big[h_i(x)\, y + \big(1 - h_i(x)\big)\big] = \sum_{k=0}^{j} p_k^j\, y^k.
$$

При $j = 1$ имеем

$$
h_1(x)\, y + \big(1 - h_1(x)\big) = p_0^1 + p_1^1\, y.
$$

Отсюда следует, что

$$
p_0^1 = 1 - h_1(x), \qquad p_1^1 = h_1(x).
$$

Пусть теперь $j \in 2:n$. Запишем

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{j} p_k^j\, y^k &= \big[\big(1 - h_j(x)\big) + h_j(x)\, y\big] \prod_{i=1}^{j-1} \big[h_i(x)\, y + \big(1 - h_i(x)\big)\big] =\\
&= \big[\big(1 - h_j(x)\big) + h_j(x)\, y\big] \sum_{k=0}^{j-1} p_k^{j-1}\, y^k = \big(1 - h_j(x)\big) \sum_{k=0}^{j-1} p_k^{j-1}\, y^k +
\end{aligned}
$$

$$+ h_j(x) \sum_{k=1}^{j} p_{k-1}^{j-1} y^k = \bigl(1 - h_j(x)\bigr)\, p_0^{j-1} + h_j(x)\, p_{j-1}^{j-1} y^j +$$
$$+ \sum_{k=1}^{j-1} \bigl[\bigl(1 - h_j(x)\bigr)\, p_k^{j-1} + h_j(x)\, p_{k-1}^{j-1}\bigr]\, y^k.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y, приходим к (6).

Предложение доказано. □

3°. Введём обобщённый полином Бернштейна с векторными коэффициентами

$$\mathbf{H}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k\, p_k^n(x), \qquad x \in [0,1], \tag{7}$$

где $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ принадлежат $\mathbb{R}^s$. Согласно (4)

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{a}_0, \qquad \mathbf{H}(1) = \mathbf{a}_n. \tag{8}$$

Зафиксируем $x \in (0,1)$. Для вычисления $\mathbf{H}(x)$ построим треугольный массив $\{\mathbf{a}_k^j\}$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_k^j = \bigl(1 - h_{n-j+1}(x)\bigr)\, \mathbf{a}_k^{j-1} + h_{n-j+1}(x)\, \mathbf{a}_{k+1}^{j-1}, \quad k \in 0 : n-j, \quad j \in 1 : n; \\ &\mathbf{a}_k^0 = \mathbf{a}_k, \quad k \in 0 : n. \end{aligned} \tag{9}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо равенство* $\mathbf{H}(x) = \mathbf{a}_0^n$.

Доказательство. Согласно (6) и (9) имеем

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{a}_0^0\, p_0^n + \mathbf{a}_n^0\, p_n^n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{a}_k^0 \left[(1 - h_n(x))\, p_k^{n-1} + h_n(x)\, p_{k-1}^{n-1}\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}_k^0 \bigl(1 - h_n(x)\bigr)\, p_k^{n-1} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k^0\, h_n(x)\, p_{k-1}^{n-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \bigl[\bigl(1 - h_n(x)\bigr)\, \mathbf{a}_k^0 + h_n(x)\, \mathbf{a}_{k+1}^0\bigr]\, p_k^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}_k^1\, p_k^{n-1} = \cdots =$$
$$= \sum_{k=0}^{1} \mathbf{a}_k^{n-1}\, p_k^1 = \bigl(1 - h_1(x)\bigr)\, \mathbf{a}_0^{n-1} + h_1(x)\, \mathbf{a}_1^{n-1} = \mathbf{a}_0^n.$$

Предложение доказано. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При всех $j \in 1:n$ обобщённый полином Бернштейна $\mathbf{H}(x)$ допускает представление*

$$\mathbf{H}(x) = \sum_{k=0}^{j} \big(\Delta^k \mathbf{a}^{n-j}\big)_0 \, \sigma_k\big(h_1(x), \dots, h_j(x)\big), \tag{10}$$

где $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_j$ — основные симметрические полиномы от j переменных и

$$(\Delta^k \, \mathbf{a}^{n-j})_i = \sum_{p=0}^{k} (-1)^{k-p} \, C_k^p \, \mathbf{a}_{i+p}^{n-j}(x)$$

— конечная разность k-го порядка.

Доказательство. Напомним рекуррентные соотношения для основных симметрических полиномов:

$$\sigma_0(h_1, \dots, h_j) = 1, \quad \sigma_{j+1}(h_1, \dots, h_j) = 0, \quad j \in 1:n; \qquad \sigma_1(h_1) = h_1;$$

$$\sigma_k(h_1, \dots, h_{j-1}, h_j) = \sigma_k(h_1, \dots, h_{j-1}) + h_j \, \sigma_{k-1}(h_1, \dots, h_{j-1}),$$

$$k \in 1:j, \quad j \in 2:n.$$

Перепишем соотношения (9):

$$\mathbf{a}_k^0 = \mathbf{a}_k, \qquad k \in 0:n;$$

$$\mathbf{a}_k^j = \mathbf{a}_k^{j-1} + h_{n-j+1}(x) \left(\Delta \, \mathbf{a}^{j-1}\right)_k, \qquad k \in 0:n-j, \quad j \in 1:n.$$

При $j = 1$ формула (10) принимает вид

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{a}_0^{n-1} \, \sigma_0(h_1) + \big(\Delta \, \mathbf{a}^{n-1}\big)_0 \, \sigma_1(h_1) =$$

$$= \mathbf{a}_0^{n-1} + h_1 \left(\Delta \, \mathbf{a}^{n-1}\right)_0 = a_0^n.$$

Это равенство верно в силу предложения 2.

Сделаем индукционный переход от j к $j+1$. Имеем

$$\mathbf{H}(x) = \sum_{k=0}^{j} \Big[\big(\Delta^k \, \mathbf{a}^{n-j-1}\big)_0 + h_{j+1}(x) \left(\Delta^{k+1} \, \mathbf{a}^{n-j-1}\right)_0\Big] \, \sigma_k(h_1, \dots, h_j) =$$

$$= \mathbf{a}_0^{n-j-1} + h_{j+1}(x) \left(\Delta^{j+1} \, \mathbf{a}^{n-j-1}\right)_0 \sigma_j(h_1, \dots, h_j) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{j} \big(\Delta^k \, \mathbf{a}^{n-j-1}\big)_0 \left[\sigma_k(h_1, \dots, h_j) + h_{j+1}(x) \, \sigma_{k-1}(h_1, \dots, h_j)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} \big(\Delta^k \, \mathbf{a}^{n-j-1}\big)_0 \, \sigma_k(h_1, \dots, h_j, h_{j+1}).$$

Предложение доказано. □

Формула (10) наиболее содержательна при $j=n$:

$$\mathbf{H}(x)=\sum_{k=0}^{n}\bigl(\Delta^k\,\mathbf{a}\bigr)_0\;\sigma_k\bigl(h_1(x),\dots,h_n(x)\bigr).$$

В этом случае коэффициенты $\bigl(\Delta^k\,\mathbf{a}\bigr)_0$ не зависят от x.

4°. Вернёмся к определению (7) обобщённого полинома Бернштейна. Согласно (3) вектор $\mathbf{H}(x)$ при фиксированном $x\in[0,1]$ является выпуклой комбинацией коэффициентов $\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$, которые в геометрическом моделировании называются *полюсами*. Когда x изменяется от 0 до 1, вектор $\mathbf{H}(x)$ описывает кривую в пространстве $\mathbb{R}^s$. Назовём её *обобщённой кривой Безье*. В силу (8) эта кривая выходит из точки $\mathbf{a}_0$ (при $x=0$) и заканчивается в точке $\mathbf{a}_n$ (при $x=1$), не покидая выпуклую оболочку полюсов.

Если $h_i(x)=x$ при всех $i\in 1:n$, то $p_k^n(x)=b_k^n(x)$, $k\in 0:n$, и обобщённая кривая Безье становится обычной кривой Безье [2]. Ниже в качестве примера мы построим кривую Безье и обобщённую кривую Безье в $\mathbb{R}^2$ по полюсам

$$\mathbf{a}_k=\bigl(\tfrac{k}{n}\,,\,(-1)^k\bigr),\qquad k\in 0:n. \tag{11}$$

5°. Запишем обычный полином Бернштейна для полюсов (11):

$$\mathbf{B}(x)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{a}_k\,b_k^n(x)=\Bigl(\sum_{k=0}^{n}\tfrac{k}{n}\,b_k^n(x),\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,b_k^n(x)\Bigr).$$

При $h_i(x)=x$, $i\in 1:n$, формула (5) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n}\tfrac{k}{n}\,b_k^n(x)=x,\qquad x\in[0,1].$$

В то же время

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,b_k^n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,(-x)^k\,(1-x)^{n-k}=(1-2x)^n.$$

Поэтому

$$\mathbf{B}(x)=\bigl(x,(1-2x)^n\bigr),\qquad x\in[0,1].$$

Соответствующая кривая Безье при $n=6$ представлена на рис. 1.

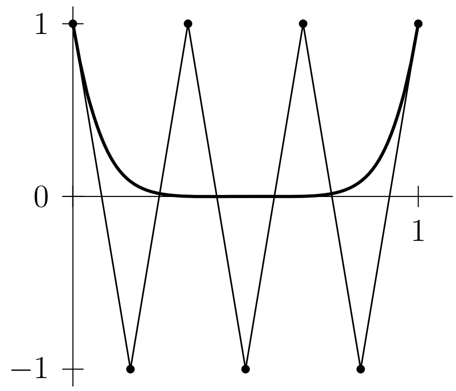

Рис. 1. Кривая Безье

6°. Зафиксируем точки $t_1, \ldots, t_n$ из $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ и, следуя [1], рассмотрим дробно-линейные функции

$$h_i(x) = \frac{x\,(1-t_i)}{x-t_i}\,, \qquad i \in 1:n. \tag{12}$$

Они непрерывны на $[0,1]$ и удовлетворяют условиям (2). Вычислим первые две производные

$$h_i'(x) = -\frac{t_i\,(1-t_i)}{(x-t_i)^2}\,, \qquad h_i''(x) = \frac{2t_i\,(1-t_i)}{(x-t_i)^3}\,.$$

Имеем $h_i'(x) > 0$ на $[0,1]$, так что все $h_i(x)$ строго возрастают. Далее $h_i''(x) > 0$ при $t_i > 1$ и $h_i''(x) < 0$ при $t_i < 0$. Значит, при $t_i > 1$ функции $h_i(x)$ строго выпуклы, а при $t_i < 0$ — строго вогнуты. На рис. 2 изображены две функции $h_i(x)$ при $t_i = -0.1$ и $t_i = 1.01$.

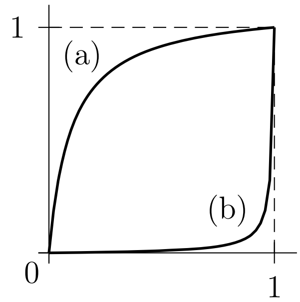

Рис. 2. Графики функций $h_i(x)$: (a) при $t_i = -0.1$; (b) при $t_i = 1.01$.

По функциям $h_i(x)$ вида (12) и полюсам (11) построим обобщённый полином Бернштейна

$$\mathbf{H}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k\, p_k^n(x) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \tfrac{k}{n}\, p_k^n(x),\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, p_k^n(x)\Big).$$

Согласно (5)

$$\mathbf{H}(x) = \Big(\varphi_n(x),\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, p_k^n(x)\Big), \qquad x \in [0,1].$$

Эта формула определяет обобщённую кривую Безье на плоскости. Обозначим её $\mathcal{H}$. Кривую $\mathcal{H}$ можно перепараметризовать, положив $x = \varphi_n^{-1}(u)$. Такая замена корректна, поскольку функция $\varphi_n(x)$ строго возрастает на $[0,1]$ от значения 0 до значения 1. Получим

$$\mathbf{H}\big(\varphi_n^{-1}(u)\big) = \Big(u,\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, p_k^n\big(\varphi_n^{-1}(u)\big)\Big), \qquad u \in [0,1].$$

Видим, что кривая $\mathcal{H}$ есть график скалярного полинома

$$\widetilde{H}(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, p_k^n\big(\varphi_n^{-1}(u)\big). \tag{13}$$

На рис. 3 представлена кривая $\mathcal{H}$ при $n = 6$. Узлы t_i выбраны так, как показано на рис. 4.

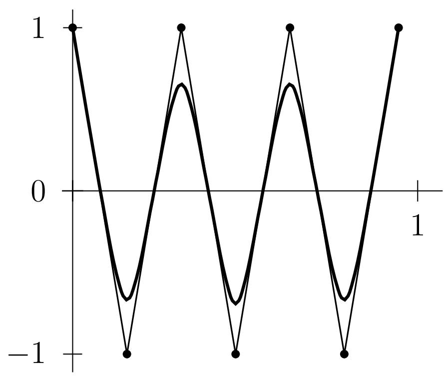

Рис. 3. Обобщённая кривая Безье

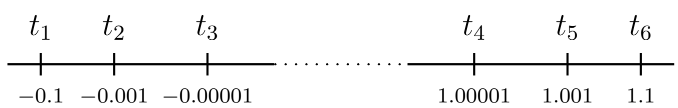

Рис. 4. Узлы t_i, $i \in 1:6$

На рис. 5 изображены графики базисных функций $p_k^n\big(\varphi_n^{-1}(u)\big)$ обобщённого полинома (13) в рассматриваемом частном случае.

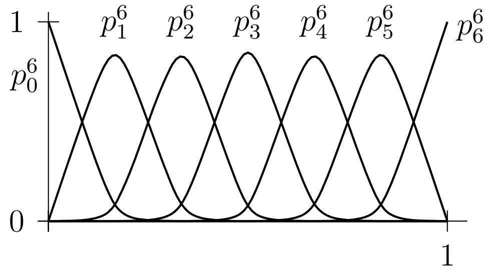

Рис. 5. Графики базисных функций

7°. В принципе, функции $h_1(x), \ldots, h_n(x)$ и $\varphi_n(x)$, отображающие отрезок $[0, 1]$ на себя, могут быть и немонотонными. Возьмём в качестве $h_1(x)$ функцию, график которой представлен на рис. 6. Положим $h_2(x) \equiv h_1(x)$, $h_3(x) \equiv x$. На рис. 7 изображены четыре полюса и соответствующая обобщённая кривая Безье третьего порядка.

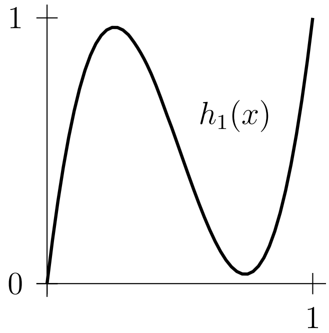

Рис. 6. График функции $h_1(x)$

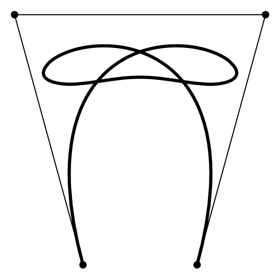

Рис. 7. Обобщённая кривая Безье третьего порядка

ЛИТЕРАТУРА

1. Виденский В. С. *Линейные положительные операторы конечного ранга.* Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1985.

2. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С. 1962-1971.