

ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ*

М. И. Григорьев

m_grigoriev@list.ru

15 сентября 2007 г.

В данном докладе представлен вариант обобщения понятия классической поверхности вращения. Предложен метод построения обобщённых поверхностей вращения, аналогичный методу из [1].

1°. Напомним, что поверхность вращения в классическом понимании образована вращением некоторой плоской кривой относительно прямолинейной оси, лежащей в плоскости этой кривой. Первое возможное обобщение связано с заменой оси вращения на некоторую пространственную кривую. Кроме того, можно обобщить само понятие вращения так, что сечением такой поверхности становится не окружность, а эллипс с двумя независимыми радиусами.

Итак, пусть $C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ задаёт некоторую непрерывно-дифференцируемую кривую. Будем называть её *кривой центров*. Предположим, что $\|C'(t)\| \neq 0$ при любом $t \in [0, 1]$. Обозначим

$$T(t) = C'(t)/\|C'(t)\|, \quad t \in [0, 1].$$

Вектор $T(t)$ является единичным вектором касательной к кривой C .

Пусть далее $f_N, f_B: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_t: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — непрерывные функции. Вектор-функция

$$F(u) = (f_N(u), f_B(u), f_t(u)), \quad u \in [0, 1],$$

определяет параметрическую кривую в \mathbb{R}^3 . Назовём её *кривой радиусов*. Функция $f_t(u)$ управляет положением центров вращения на кривой C .

Выберем также некоторую непрерывную вектор-функцию $B: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ такую, чтобы для всех t из отрезка $[0, 1]$ вектор $B(t)$ имел единичную длину

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: <http://www.dha.spb.ru/>

и был ортогонален вектору $T(t)$. Положим

$$N(t) = B(t) \times T(t), \quad (1)$$

где \times — знак векторного умножения.

Зафиксируем некоторое $u \in [0, 1]$. Рассмотрим точку на кривой центров C , соответствующую значению параметра t , равному $t_u = f_t(u)$. Пара $(N(t_u), B(t_u))$ определяет нормальную плоскость к кривой в этой точке (см. рис. 1). Рассмотрим лежащий в этой плоскости эллипс с центром в точке $C(t_u)$ и радиусами $f_N(u)$, $f_B(u)$:

$$G(u, v) = C(t_u) + (f_N(u) \cos 2\pi v) N(t_u) + (f_B(u) \sin 2\pi v) B(t_u), \quad v \in [0, 1]. \quad (2)$$

Когда параметр u пробегает все значения от 0 до 1, кривая (2) порождает поверхность в пространстве \mathbb{R}^3 , которая называется *обобщённой поверхностью вращения* кривой радиусов F относительно кривой центров C .

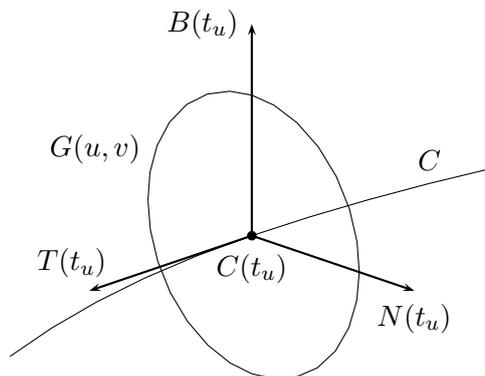


Рис. 1

2°. Пусть на плоскости зафиксированы три полюса P_0, P_1, P_2 . По ним можно построить проективную кривую Безье второго порядка [2, с. 212–221]

$$R(v) = (r_x(v), r_y(v)) = \frac{P_0(1-v)^2 + 2wP_1v(1-v) + P_2v^2}{(1-v)^2 + 2wv(1-v) + v^2}, \quad v \in [0, 1], \quad (3)$$

где w — некоторое положительное число. Известно, что если полюсы P_0, P_1, P_2 расположены в вершинах единичного квадрата так, как показано на рис. 2, и выполнено условие $w = \sqrt{2}/2$, то кривая (3) является четвертью окружности единичного радиуса [3].

Четверть эллипса можно построить таким же образом. Зафиксируем два положительных числа a, b и рассмотрим кривую

$$\tilde{R}(v) = (a r_x(v), b r_y(v)), \quad v \in [0, 1], \quad (4)$$

построенную по полюсам $\tilde{P}_0(a, 0)$, $\tilde{P}_1(a, b)$, $\tilde{P}_2(0, b)$. Здесь $r_x(v)$ и $r_y(v)$ те же, что и в (3). Очевидно, что если значение w равно $\sqrt{2}/2$, то кривая (4) представляет собой четверть эллипса с радиусами a, b (рис. 3).

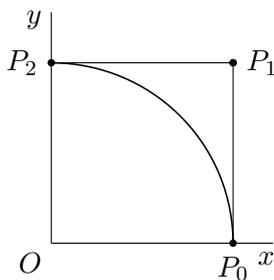


Рис. 2

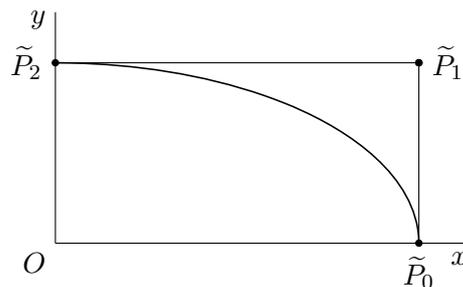


Рис. 3

3°. В [1] было показано, как строить классические поверхности вращения с помощью проективных кривых Безье второго порядка. Подобный подход применим и к обобщённым поверхностям вращения.

Рассмотрим три вектор-функции $P_0, P_1, P_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} P_0(u) &= C(t_u) + f_N(u)N(t_u), & P_2(u) &= C(t_u) + f_B(u)B(t_u), \\ P_1(u) &= C(t_u) + f_N(u)N(t_u) + f_B(u)B(t_u). \end{aligned}$$

Зафиксируем $u \in [0, 1]$. Уравнение проективной кривой второго порядка, построенной по полюсам $P_0(u), P_1(u), P_2(u)$ с параметром $w = \sqrt{2}/2$ имеет вид

$$\tilde{G}(u, v) = \frac{P_0(u)(1-v)^2 + \sqrt{2}P_1(u)v(1-v) + P_2(u)v^2}{(1-v)^2 + \sqrt{2}v(1-v) + v^2}, \quad v \in [0, 1].$$

Перепишем эту формулу

$$\tilde{G}(u, v) = C(t_u) + \frac{\tilde{P}_0(u)(1-v)^2 + \sqrt{2}\tilde{P}_1(u)v(1-v) + \tilde{P}_2(u)v^2}{(1-v)^2 + \sqrt{2}v(1-v) + v^2}. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(u) &= f_N(u)N(t_u), & \tilde{P}_2(u) &= f_B(u)B(t_u), \\ \tilde{P}_1(u) &= f_N(u)N(t_u) + f_B(u)B(t_u). \end{aligned}$$

На основании пункта 2° заключаем, что кривая (5) является четвертью эллипса с центром в точке $C(t_u)$ и радиусами $f_N(u)$, $f_B(u)$, лежащего в нормальной плоскости.

Когда параметр u пробегает все значения от 0 до 1, кривая $\tilde{G}(u, v)$ порождает поверхность в пространстве \mathbb{R}^3 , которая по построению совпадает с четвертью обобщённой поверхности вращения $G(u, v)$ (рис. 4).

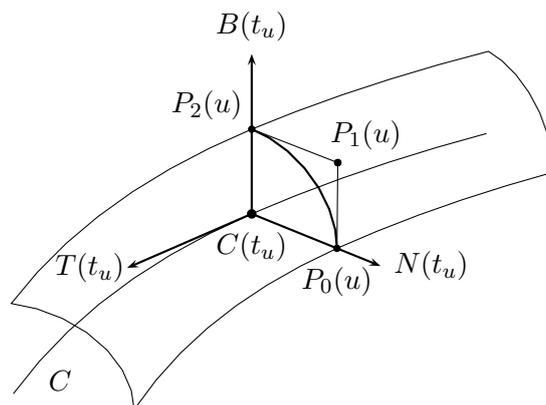


Рис. 4

4°. Укажем некоторые возможные способы выбора вектор-функции B и приведём примеры обобщённых поверхностей вращения.

Рассмотрим сначала простой случай, когда кривая центров C является плоской. Не ограничивая общности можно считать, что кривая C лежит в плоскости Oxz . Положим

$$B(t) \equiv (0, 1, 0). \quad (6)$$

С учётом (1) и (6) имеем

$$N(t) = (T_x(t), 0, -T_z(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (7)$$

где $T_x(t)$, $T_z(t)$ — первая и третья компоненты вектор-функции $T(t)$.

На рис. 5 представлены кривая радиусов F (в данном примере f_N совпадает с f_B и $f_t(u) \equiv u$) и кривая центров C . Соответствующая им поверхность вращения изображена на рис. 6.

Когда в качестве кривой центров выбран отрезок оси Oz , и радиусы f_N , f_B тождественно равны, обобщённая поверхность вращения представляет собой обычную поверхность вращения. Пример такой поверхности дан на рис. 7. Порождающие кривая радиусов и кривая центров приведены на рис. 8.

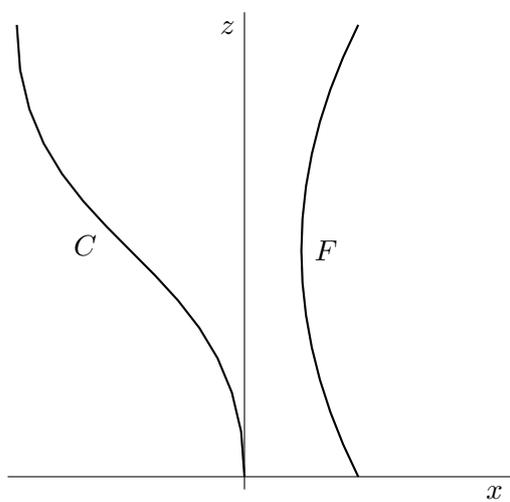


Рис. 5

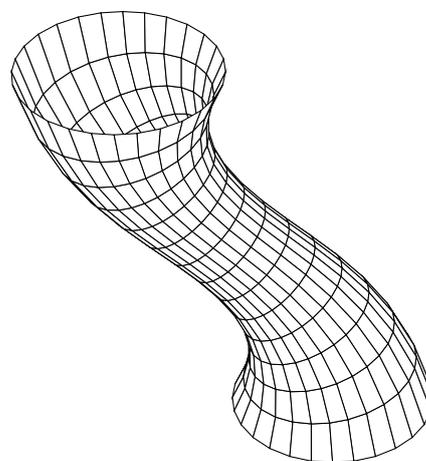


Рис. 6

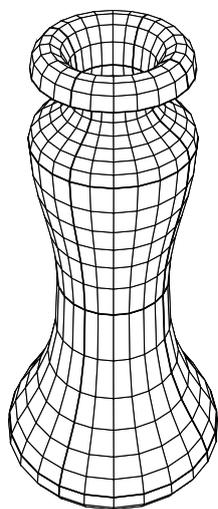


Рис. 7

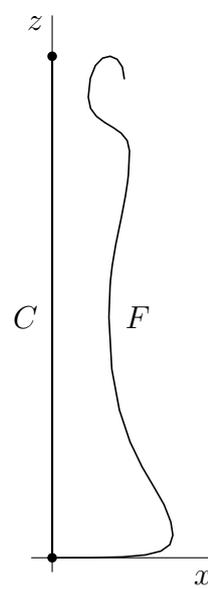


Рис. 8

Вернёмся к общему случаю пространственной кривой центров C . Укажем наиболее простой способ выбора B . Введём дополнительное предположение, что кривая центров обладает гладкостью второго порядка и что

$$\|C''(t)\| > 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (8)$$

Положим

$$B(t) = \frac{C'(t) \times C''(t)}{\|C'(t) \times C''(t)\|}, \quad t \in [0, 1]. \quad (9)$$

Выражение (9) определяет бинормальный вектор к кривой центров в точке $C(t)$. Значит, вектор $N(t) = B(t) \times T(t)$ равен вектору главной нормали к кривой C в этой точке, а правая тройка векторов $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ образует базис Френе [4].

На рис. 9 приведён пример обобщённой поверхности вращения, построенной с учётом выбранной в данном пункте вектор-функции $B(t)$. Порождающая кривая радиусов F представлена на рис. 10 (для наглядности приведены также её проекции на координатные плоскости Oxz и Oyz). В качестве кривой центров использована дуга винтовой кривой.

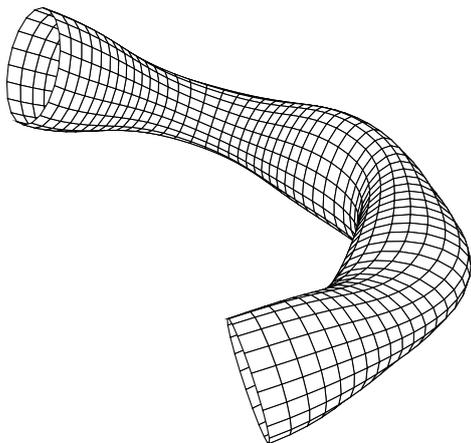


Рис. 9

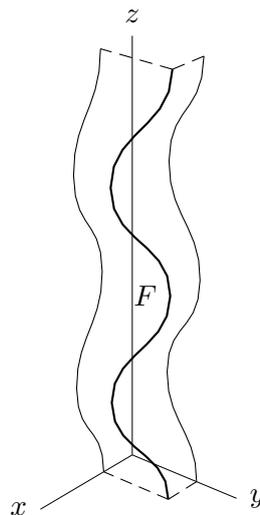


Рис. 10

5°. Условие (8) сильно ограничивает поведение кривой центров. Укажем ещё один способ выбора вектор-функции $B(t)$, не требующий гладкости второго порядка, но предполагающий существование ненулевого вектора N_0 такого, что

$$\|T(t) \times N_0\| \neq 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (10)$$

Положим

$$B(t) = \frac{T(t) \times N_0}{\|T(t) \times N_0\|}, \quad t \in [0, 1].$$

Вектор $B(t)$ и в этом случае ортогонален касательному вектору $T(t)$ при каждом $t \in [0, 1]$ и имеет единичную длину.

Поясним геометрический смысл такого выбора. Зафиксируем $t \in [0, 1]$ и рассмотрим две плоскости, проходящие через точку $C(t)$ и имеющие нормальные векторы $T(t)$ и N_0 . Из (10) следует, что эти плоскости не совпадают. Прямая, по которой они пересекаются проходит через точку $C(t)$ и имеет направление $B(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев М. И. *Построение поверхностей вращения* // Семинар «ДНА & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2007 г. (<http://dha.spb.ru/rep07.shtml#0627>)
2. Голованов Н. Н., Ильютко Д. П., Носовский Г. В., Фоменко А. Т. *Компьютерная геометрия*. М.: Академия, 2006. 512 с.
3. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Можно ли построить окружность с помощью кривых Безье?* // Семинар «ДНА & CAGD». Избранные доклады. 16 декабря 2006 г. (<http://dha.spb.ru/rep06.shtml#1216>)
4. Погорелов А. И. *Дифференциальная геометрия*. 6-е изд. М.: Наука, 1974. 176 с.