ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ ХААРА*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

19 марта 2011 г.

В докладе представлены базовые сведения о дискретных функциях Хаара. Описаны быстрое преобразование Хаара и его обращение. Приведены примеры разложения сигнала по базису Хаара.

1°. Пусть $N = 2^s$, где s — натуральное число. Обозначим

$$N_\nu = N/2^\nu, \quad \nu \in 0:s; \qquad \Delta_\nu = 2^{\nu-1}, \quad \nu \in 1:s+1.$$

Очевидно, что $N_0 = N$, $N_s = 1$; $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_{s+1} = N$ и

$$N_\nu \, \Delta_{\nu+1} = N \quad \text{при всех } \nu \in 0:s.$$

Построим рекуррентную последовательность систем N-периодических сигналов

$$\varphi_\nu = \bigl\{\varphi_\nu(p;j)\bigr\}_{p=0}^{N_{\nu-1}-1}, \quad \nu = 1,\ldots,s.$$

Сигнал $\varphi_\nu(p;j)$ как элемент пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $\varphi_\nu(p)$. Положим

$$\varphi_0(p) = \delta_N(\cdot - p), \quad p \in 0:N-1;$$

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(p) &= \varphi_{\nu-1}(2p) + \varphi_{\nu-1}(2p+1), \\ \varphi_\nu(p+N_\nu) &= \varphi_{\nu-1}(2p) - \varphi_{\nu-1}(2p+1), \end{aligned} \tag{1}$$

$$p \in 0:N_\nu - 1, \quad \nu = 1,\ldots,s.$$

В табл. 1 представлена структура последовательности $\{\varphi_\nu\}_{\nu=0}^{s}$ при $s = 3$ (при $N = 8$).

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Таблица 1

φ_0	$\varphi_0(0)$	$\varphi_0(1)$	$\varphi_0(2)$	$\varphi_0(3)$	$\varphi_0(4)$	$\varphi_0(5)$	$\varphi_0(6)$	$\varphi_0(7)$
φ_1	$\varphi_1(0)$	$\varphi_1(1)$	$\varphi_1(2)$	$\varphi_1(3)$	$\varphi_1(4)$	$\varphi_1(5)$	$\varphi_1(6)$	$\varphi_1(7)$
φ_2	$\varphi_2(0)$	$\varphi_2(1)$	$\varphi_2(2)$	$\varphi_2(3)$				
φ_3	$\varphi_3(0)$	$\varphi_3(1)$						

Ясно, что сигналы системы φ_ν можно выразить через сигналы системы φ_0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы формулы*

$$\varphi_\nu(p) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}) + \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}), \tag{2}$$

$$\varphi_\nu(p + N_\nu) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}) - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}), \tag{3}$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Начнём с формулы (2), которую можно переписать так:

$$\varphi_\nu(p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}). \tag{4}$$

При $\nu = 1$ она примет вид

$$\varphi_1(p) = \sum_{q=0}^{1} \varphi_0(q + 2p),$$

что соответствует (1). Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν. Имеем

$$\varphi_\nu(p) = \varphi_{\nu-1}(2p) + \varphi_{\nu-1}(2p+1) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + 2p\Delta_\nu) + \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + (2p+1)\Delta_\nu) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}) + \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}).$$

Справедливость формулы (4) при всех $\nu \in 1 : s$ установлена. Отметим, что эта формула верна и при $\nu = 0$.

Заменив в (4) ν на $\nu-1$ и подставив полученное выражение в рекуррентное соотношение $\varphi_\nu(p+N_\nu) = \varphi_{\nu-1}(2p) - \varphi_{\nu-1}(2p+1)$, придём аналогично предыдущему к (3).

Предложение доказано. $\square$

Система φ_s состоит из двух сигналов $\varphi_s(0)$ и $\varphi_s(1)$. Согласно (4) и (3) при $\nu = s$ ($N_s = 1$, $p = 0$)

$$\varphi_s(0) = \sum_{q=0}^{N-1} \varphi_0(q),$$

$$\varphi_s(1) = \sum_{q=0}^{N/2-1} \varphi_0(q) - \sum_{q=N/2}^{N-1} \varphi_0(q)$$

или, в развёрнутом виде,

$$\varphi_s(0;j) = \sum_{q=0}^{N-1} \delta_N(j-q), \tag{5}$$

$$\varphi_s(1;j) = \sum_{q=0}^{N/2-1} \delta_N(j-q) - \sum_{q=N/2}^{N-1} \delta_N(j-q). \tag{6}$$

Ясно, что $\varphi_s(0;j) \equiv 1$, в то время как $\varphi_s(1;j)$ на половине периода принимает значение $+1$, а на второй половине периода значение -1.

Запишем ещё одну формулу, которая следует из (3) при $p=0$:

$$\varphi_\nu(N_\nu;j) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \delta_N(j-q) - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j-q), \tag{7}$$
$$j \in 0:N-1, \quad \nu = 1,\dots,s.$$

2°. Формулы (2) и (3) можно объединить

$$\varphi_\nu(p+lN_\nu) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{l\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor} \varphi_0(q+p\Delta_{\nu+1}), \tag{8}$$
$$p \in 0:N_\nu-1, \quad l \in 0:1, \quad \nu = 1,\dots,s.$$

Действительно, при $l=0$ формула (8) совпадает с (4), а при $l=1$ — с (3). В последнем случае нужно учесть, что

$$\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{при } q \in 0:\Delta_\nu-1, \\ 1 & \text{при } q \in \Delta_\nu : \Delta_{\nu+1}-1. \end{cases} \tag{9}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При каждом* $\nu \in 1:s$ *сигналы*

$$\varphi_\nu(0), \varphi_\nu(1), \ldots, \varphi_\nu(N_{\nu-1}-1)$$

попарно ортогональны; при этом $\|\varphi_\nu(k)\|^2 = 2^\nu$ *при всех* $k \in 0 : N_{\nu-1}-1$.

Доказательство. Возьмём индексы $k, k' \in 0 : N_{\nu-1}-1$ и представим их в виде

$$k = lN_\nu + p, \quad k' = l'N_\nu + p',$$

где $p, p' \in 0 : N_\nu - 1$, $l, l' \in 0 : 1$. Согласно (8) имеем

$$\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k') \rangle = \bigl\langle \varphi_\nu(p + lN_\nu), \varphi_\nu(p' + l'N_\nu) \bigr\rangle =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{l\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor + l'\lfloor q'/\Delta_\nu \rfloor} \bigl\langle \varphi_\nu(q + p\Delta_{\nu+1}), \varphi_\nu(q' + p'\Delta_{\nu+1}) \bigr\rangle.$$

Воспользуемся формулой

$$\langle \delta_N(\cdot - s), \delta_N(\cdot - s') \rangle = \delta_N(s - s'), \quad s, s' \in \mathbb{Z}.$$

Получим

$$\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k') \rangle = \sum_{q,q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{l\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor + l'\lfloor q'/\Delta_\nu \rfloor} \delta_N(q - q' + (p - p')\Delta_{\nu+1}).$$

Отметим, что $|q - q'| \leqslant \Delta_{\nu+1} - 1$. Если $p \neq p'$, то аргумент у δ_N отличен от нуля при всех $q, q' \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$. В этом случае

$$\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k') \rangle = 0.$$

При $p = p'$ аргумент у δ_N равен нулю только при $q = q'$, поэтому

$$\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k') \rangle = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{(l+l')\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor}.$$

Напомним, что $l, l' \in 0 : 1$. Если $l \neq l'$, то $l + l' = 1$. В силу (9) получим

$$\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k') \rangle = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{\lfloor q/\Delta_\nu \rfloor} = 0.$$

И только тогда, когда $p = p'$, $l = l'$, то есть когда $k = k'$, скалярное произведение $\langle \varphi_\nu(k), \varphi_\nu(k) \rangle$ отлично от нуля. Оно равно $\Delta_{\nu+1} = 2^\nu$.

Предложение доказано. $\square$

3°. Рассмотрим систему сигналов

$$\varphi_s(0); \quad \varphi_\nu(p+N_\nu), \;\; p \in 0 : N_\nu - 1, \;\; \nu = s, s-1, \ldots, 1. \tag{10}$$

При $N = 8 = 2^3$ она выглядит так (см. табл. 1)

$$\varphi_3(0),\; \varphi_3(1),\; \varphi_2(2),\; \varphi_2(3),\; \varphi_1(4),\; \varphi_1(5),\; \varphi_1(6),\; \varphi_1(7).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Сигналы* (10) *попарно ортогональны.*

Доказательство. Зафиксируем $\nu \in 1 : s-1$. Внутри блока $\{\varphi_\nu(p+N_\nu)\}_{p=0}^{N_\nu-1}$ сигналы попарно ортогональны в силу предложения 2. Они ортогональны и сигналам блоков $\{\varphi_{\nu'}(p+N_{\nu'})\}_{p=0}^{N_{\nu'}-1}$ при $\nu' > \nu$ (включая блок $\{\varphi_s(0), \varphi_s(1)\}$), которые по построению являются линейными комбинациями сигналов блока $\{\varphi_\nu(p)\}_{p=0}^{N_\nu-1}$. Ортогональность следует из того, что согласно предложению 2 сигналы блока $\{\varphi_\nu(p)\}_{p=0}^{N_\nu-1}$ ортогональны сигналам блока $\{\varphi_\nu(p+N_\nu)\}_{p=0}^{N_\nu-1}$. $\square$

Ортогональная система (10) состоит из N сигналов. Она образует базис пространства $\mathbb{C}_N$, который называется *базисом Хаара.* Сигналы, входящие в базис Хаара, называются *дискретными функциями Хаара.*

Вид функций $\varphi_s(0)$ и $\varphi_s(1)$ нам известен (см. (5), (6)). Уточним структуру функций $\varphi_\nu(p+N_\nu)$ при $\nu \in 1 : s-1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При* $\nu \in 1 : s-1$ *и* $p \in 0 : N_\nu - 1$ *справедливо тождество*

$$\varphi_\nu(p+N_\nu; j) = \varphi_\nu(N_\nu; j - p\Delta_{\nu+1}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, подставив в (7) $j - p\Delta_{\nu+1}$ вместо j, получим

$$\varphi_\nu(N_\nu; j - p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - q) \; - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - q) =$$
$$= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}; j) \; - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \varphi_0(q + p\Delta_{\nu+1}; j) = \varphi_\nu(p+N_\nu; j).$$

Теперь базис Хаара (10) принимает вид

$$\varphi_s(0;j),\; \varphi_s(1;j); \quad \varphi_\nu(N_\nu; j - p\Delta_{\nu+1}), \;\; p \in 0 : N_\nu - 1, \;\; \nu = s-1, s-2, \ldots, 1.$$

Функции $\varphi_s(0;j)$, $\varphi_s(1;j)$ и $\varphi_\nu(N_\nu;j)$ при $\nu = s-1, s-2, \ldots, 1$ на множестве $0 : N-1$ определяются формулами (5), (6), (7).

На рис. представлен базис Хаара при $N = 8 = 2^3$. В данном случае $\varphi_2(N_2) = \varphi_2(2)$, $\varphi_1(N_1) = \varphi_1(4)$.

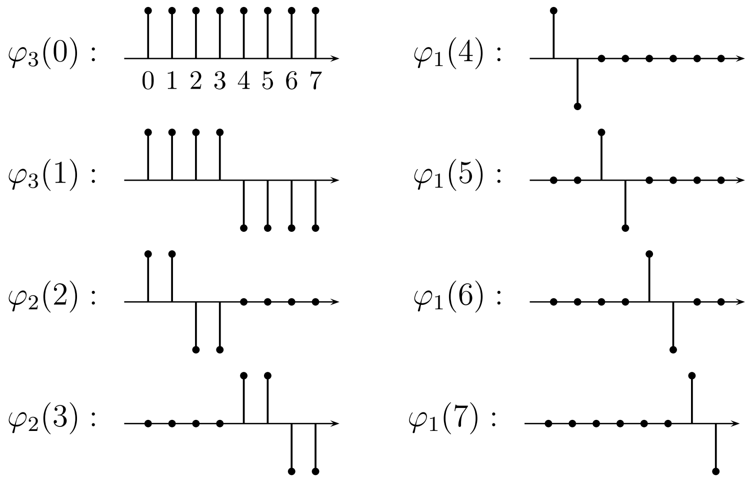

Рис. Базис Хаара при $N = 2^3$.

4°. Разложим сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ по базису Хаара (10):

$$x = 2^{-s}\, \xi_s(0)\, \varphi_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} \xi_\nu(p + N_\nu)\, \varphi_\nu(p + N_\nu). \tag{11}$$

Здесь $\xi_s(0) = \langle x, \varphi_s(0)\rangle$, $\xi_\nu(p+N_\nu) = \langle x, \varphi_\nu(p+N_\nu)\rangle$. Это следует из предложения 3 и условий $\|\varphi_s(0)\|^2 = 2^s$, $\|\varphi_\nu(p+N_\nu)\|^2 = 2^\nu$.

Введём расширенную систему обозначений

$$\begin{aligned} &\xi_0(p) = \langle x, \varphi_0(p)\rangle, \quad p \in 0 : N-1; \\ &\xi_\nu(p) = \langle x, \varphi_\nu(p)\rangle, \quad p \in 0 : N_{\nu-1} - 1, \;\; \nu = 1, \ldots, s. \end{aligned}$$

Имеем

$$\xi_0(p) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \delta_N(j-p) = x(p), \quad p \in 0 : N-1.$$

Согласно (1) при $p \in 0 : N_\nu - 1$

$$\begin{aligned} \xi_\nu(p) &= \langle x, \varphi_{\nu-1}(2p) + \varphi_{\nu-1}(2p+1)\rangle = \xi_{\nu-1}(2p) + \xi_{\nu-1}(2p+1), \\ \xi_\nu(p+N_\nu) &= \langle x, \varphi_{\nu-1}(2p) - \varphi_{\nu-1}(2p+1)\rangle = \xi_{\nu-1}(2p) - \xi_{\nu-1}(2p+1). \end{aligned}$$

Приходим к следующей схеме вычислений:

$$\begin{aligned} \xi_0(p) &= x(p), \quad p \in 0 : N-1; \\ \xi_\nu(p) &= \xi_{\nu-1}(2p) + \xi_{\nu-1}(2p+1), \\ \xi_\nu(p+N_\nu) &= \xi_{\nu-1}(2p) - \xi_{\nu-1}(2p+1), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, &\quad \nu = 1, \ldots, s. \end{aligned} \tag{12}$$

Эта схема называется *быстрым преобразованием Хаара* сигнала x. Она позволяет вычислить коэффициенты разложения (11) (см. табл. 2).

Таблица 2

ξ_0	$\xi_0(0)$	$\xi_0(1)$	$\xi_0(2)$	$\xi_0(3)$	$\xi_0(4)$	$\xi_0(5)$	$\xi_0(6)$	$\xi_0(7)$
ξ_1	$\xi_1(0)$	$\xi_1(1)$	$\xi_1(2)$	$\xi_1(3)$	$\xi_1(4)$	$\xi_1(5)$	$\xi_1(6)$	$\xi_1(7)$
ξ_2	$\xi_2(0)$	$\xi_2(1)$	$\xi_2(2)$	$\xi_2(3)$				
ξ_3	$\xi_3(0)$	$\xi_3(1)$						

Система коэффициентов

$$\xi_s(0); \quad \xi_\nu(p+N_\nu), \;\; p \in 0 : N_\nu - 1, \;\; \nu = s, s-1, \ldots, 1, \tag{13}$$

называется *спектром Хаара* сигнала x. Для вычисления спектра Хаара по схеме (12) требуются только сложения/вычитания в количестве

$$2 \sum_{\nu=1}^{s} N_\nu = 2 \sum_{\nu=1}^{s} 2^{s-\nu} = 2(N-1)$$

(примерно два сложения/вычитания на одну компоненту спектра!).

ПРИМЕР. Разложим по базису Хаара при $N = 8$ сигнал

$$x = (1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1).$$

Результаты вычислений приведены в табл. 3.

Таблица 3

ξ_0	1	− 1	− 1	1	1	1	− 1	− 1
ξ_1	0	0	2	− 2	2	− 2	0	0
ξ_2	0	0	0	4				
ξ_3	0	0						

Получаем

$$x = \tfrac{1}{4}\, 4\, \varphi_2(3) + \tfrac{1}{2}\, 2\, \varphi_1(4) - \tfrac{1}{2}\, 2\, \varphi_1(5) = \varphi_2(3) + \varphi_1(4) - \varphi_1(5).$$

Справедливость этого равенства можно проверить непосредственно, если воспользоваться видом функций $\varphi_2(3)$, $\varphi_1(4)$, $\varphi_1(5)$ (см. рис.).

5°. Схема (12) допускает обращение:

$$\begin{aligned} \xi_{\nu-1}(2p) &= \tfrac{1}{2}\big[\xi_\nu(p) + \xi_\nu(p+N_\nu)\big], \\ \xi_{\nu-1}(2p+1) &= \tfrac{1}{2}\big[\xi_\nu(p) - \xi_\nu(p+N_\nu)\big], \\ p \in 0 : N_\nu - 1, &\quad \nu = s, s-1, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Формулы (14) позволяют по спектру Хаара (13) сигнала x восстановить все его отсчёты: $x(p) = \xi_0(p)$, $p \in 0 : N-1$.

6°. Приведём ещё два примера. Первый пример посвящён разложению сигнала по базису Хаара, второй — обратной задаче.

Рассмотрим при $k \in 0 : s-1$ сигнал-«ступеньку»

$$h_k(j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{k+1}-1} \delta_N(j-q), \quad j \in 0 : N-1.$$

Покажем, что

$$h_k(j) = 2^{-s+k} + \sum_{\nu=k+1}^{s} 2^{-\nu+k}\, \varphi_\nu(N_\nu; j). \tag{15}$$

Согласно (1) при $p = 0$, $\nu \in 1 : s$ имеем

$$2\, \varphi_{\nu-1}(0; j) = \varphi_\nu(0; j) + \varphi_\nu(N_\nu; j).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=k+1}^{s} 2^{-\nu+k}\, \varphi_\nu(N_\nu; j) &= 2 \sum_{\nu=k+1}^{s} 2^{-\nu+k}\, \varphi_{\nu-1}(0; j) - \sum_{\nu=k+1}^{s} 2^{-\nu+k}\, \varphi_\nu(0; j) = \\ &= \sum_{\nu=k}^{s-1} 2^{-\nu+k}\, \varphi_\nu(0; j) - \sum_{\nu=k+1}^{s} 2^{-\nu+k}\, \varphi_\nu(0; j) = \\ &= \varphi_k(0; j) - 2^{-s+k}\, \varphi_s(0; j). \end{aligned}$$

Отсюда следует (15), если учесть, что $\varphi_s(0; j) \equiv 1$ и $\varphi_k(0; j) = h_k(j)$ (см. (4)).

Положив в (15) $k = 0$, придём к разложению единичного импульса по базису Хаара:

$$\delta_N(j) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^{s} 2^{-\nu}\, \varphi_\nu(N_\nu; j), \quad j \in 0 : N-1.$$

Теперь восстановим сигнал x, у которого все компоненты спектра Хаара равны единице. Покажем, что в этом случае

$$x(j) = 1 - \tfrac{2}{N}\, \mathrm{rev}_s(j), \quad j \in 0 : N-1. \tag{16}$$

Здесь $\mathrm{rev}_s(j)$ — число, двоичный код которого есть перевёрнутый двоичный код числа j. Таким образом, если $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_2$, то $\mathrm{rev}_s(j) = (j_0, j_1, \ldots, j_{s-1})_2$. Нам потребуются два простых свойства операции rev_s:

$$\begin{gathered} \mathrm{rev}_1(j) = j \quad \text{при } j \in 0:1; \\ \mathrm{rev}_{\nu+1}(2p+\sigma) = \sigma\, 2^\nu + \mathrm{rev}_\nu(p), \\ p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \sigma \in 0:1, \quad \nu = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{17}$$

Проверим последнее равенство. Пусть $p = p_{\nu-1}\, 2^{\nu-1} + \cdots + p_0$. Тогда

$$2p + \sigma = p_{\nu-1}\, 2^\nu + \cdots + p_0\, 2 + \sigma$$

и

$$\mathrm{rev}_{\nu+1}(2p+\sigma) = \sigma\, 2^\nu + p_0\, 2^{\nu-1} + \cdots + p_{\nu-1} = \sigma\, 2^\nu + \mathrm{rev}_\nu(p).$$

Для восстановления таблицы быстрого преобразования Хаара по спектру, все компоненты которого равны единице, воспользуемся формулами (14), заменив в них ν на $s - \nu$:

$$\begin{gathered} \xi_{s-\nu-1}(2p) = \tfrac{1}{2}\bigl[\xi_{s-\nu}(p) + 1\bigr], \\ \xi_{s-\nu-1}(2p+1) = \tfrac{1}{2}\bigl[\xi_{s-\nu}(p) - 1\bigr], \\ p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 0, 1, \ldots, s-1 \end{gathered} \tag{18}$$

(учли, что $N_{s-\nu} = \Delta_{\nu+1}$). Блоки ξ_{s-1} и ξ_s должны выглядеть так:

Таблица 4

ξ_{s-1}	1	0	1	1
ξ_s	1	1		

Введём обозначение

$$x_\nu(p) = 1 - \tfrac{1}{2^{\nu-1}}\,\mathrm{rev}_\nu(p)$$

и покажем, что при $\nu = 1, \ldots, s$

$$\xi_{s-\nu}(p) = x_\nu(p), \quad p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1.$$

При $\nu = 1$ эта формула верна (см. табл. 4). Проверим, что при указанных $\xi_{s-\nu}$ выполняются соотношения (18).

Перепишем (18) в терминах x_ν:

$$\begin{gathered} x_{\nu+1}(2p) = \tfrac{1}{2}\bigl[x_\nu(p) + 1\bigr], \\ x_{\nu+1}(2p+1) = \tfrac{1}{2}\bigl[x_\nu(p) - 1\bigr], \\ p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1. \end{gathered} \tag{19}$$

Подставив вместо $x_\nu(p)$ его явное выражение, преобразуем (19) к виду

$$\begin{gathered} \mathrm{rev}_{\nu+1}(2p) = \mathrm{rev}_\nu(p), \\ \mathrm{rev}_{\nu+1}(2p+1) = 2^\nu + \mathrm{rev}_\nu(p), \\ p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1. \end{gathered}$$

Справедливость последних соотношений следует из (17).

Итак, мы полностью восстановили таблицу быстрого преобразования Хаара. По построению

$$x(j) = \xi_0(j) = x_s(j) = 1 - \tfrac{2}{N}\,\mathrm{rev}_s(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

7°. Дальнейшие сведения о дискретных функциях Хаара имеются в [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть вторая. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 100 с.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Сравнительное изучение двух вейвлетных базисов* // Проблемы передачи инф. 2000. Т. 36. Вып. 2. С. 27–37.

3. Малозёмов В. Н., Певный А. Б., Третьяков А. А. *Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений* // Проблемы передачи инф. 1998. Т. 34. Вып. 2. С. 77–85.