ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

5 сентября 2009 г.

Цель данного доклада — показать, следуя [1], как на основе гармонического анализа проверяется иррациональность числа π .

1°. Напомним, что положительное число a называется *рациональным*, если оно допускает представление $a = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. В противном случае число a называется *иррациональным*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Число π является иррациональным.

Этот факт был установлен Ламбертом в 1761 г. Идея приводимого ниже доказательства принадлежит Нивену (1947 г.)

2°. Начнём издалека.

ЛЕММА. Пусть $P(x)$ — алгебраический полином степени $2k$. Тогда

$$\int_0^1 P(x) \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi} [Q(0) + Q(1)],$$

где

$$Q(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{\pi^{2i}} P^{(2i)}(x).$$

Доказательство. Приняв во внимание, что $P^{(2k+2)}(x) \equiv 0$, запишем

$$Q''(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{\pi^{2i}} P^{(2i+2)}(x) = \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{\pi^{2i-2}} P^{(2i)}(x).$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: <http://www.dha.spbu.ru/>

Далее

$$\pi^2 Q(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{\pi^{2i-2}} P^{(2i)}(x).$$

Значит,

$$Q''(x) + \pi^2 Q(x) = \pi^2 P(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [Q'(x) \sin \pi x - \pi Q(x) \cos \pi x] &= (Q''(x) + \pi^2 Q(x)) \sin \pi x = \\ &= \pi^2 P(x) \sin \pi x. \end{aligned}$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\begin{aligned} \int_0^1 P(x) \sin \pi x dx &= \frac{1}{\pi^2} (Q'(x) \sin \pi x - \pi Q(x) \cos \pi x) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{\pi} [Q(0) + Q(1)]. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

3°. Переходим к доказательству предложения. Допустим, что π — рациональное число. В этом случае $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Последовательность $\left\{ \frac{\pi m^k}{k!} \right\}$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Выберем k столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\pi m^k}{k!} < 1. \quad (1)$$

Введём полином $P(x)$ степени $2k$:

$$P(x) = \frac{x^k (1-x)^k}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^k C_k^s (-1)^s x^{k+s}.$$

Ясно, что $P^{(i)}(0) = 0$ при $i \in 0 : k-1$ и

$$P^{(k+i)}(0) = C_k^i (-1)^i \frac{(k+i)!}{k!} \quad \text{при } i \in 0 : k.$$

Учитывая, что $P(1-x) \equiv P(x)$, имеем также

$$P^{(i)}(1) = (-1)^i P^{(i)}(0), \quad i \in 0 : 2k.$$

Полином

$$Q(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{\pi^{2i}} P^{(2i)}(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i n^i}{m^i} P^{(2i)}(x)$$

обладает тем свойством, что $m^k [Q(0) + Q(1)]$ — целое число.

Положим

$$A = \pi m^k \int_0^1 P(x) \sin \pi x dx.$$

Согласно лемме

$$A = m^k [Q(0) + Q(1)],$$

так что A — целое число. Вместе с тем, согласно (1)

$$0 < A \leq \pi m^k \int_0^1 P(x) dx \leq \frac{\pi m^k}{k!} < 1.$$

Получили противоречие. Иррациональность π установлена. $\square$

4°. Число π имеет богатую историю. Основные события этой истории отражены в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухштаб А. А. *Теория чисел*. Изд. 2-е. М.: Просвещение, 1966. 384 с.
2. Жуков А. В. *О числе π* . М.: Изд-во МЦНМО, 2002. 32 с.