

МОЙ ПУТЬ В НАУКЕ

(Предполагавшийся доклад в Московском
математическом обществе)

Леонид В. Канторович

16 ноября 2011 г.

От публикатора

Публикуемые воспоминания Л.В.Канторовича были продиктованы им в период с конца января по конец марта 1986 г., когда он был уже тяжело болен и лежал в больнице Академии наук в Москве. Работа началась в форме подготовки к предполагаемому в его семидесятипяatileтие докладу на Московском математическом обществе. К сожалению, болезнь быстро прогрессировала, и Леонид Витальевич не успел закончить этой работы, тем более, что он часто отвлекался на другие темы. В этот период им были написаны большая статья «Функциональный анализ» для английской экономической энциклопедии (статья также была опубликована в Сибирском математическом журнале, 1987, т. 28, № 1, с. 7–16), статья о ценах в газету «Известия» («Прогресс и цены», 15 февраля 1986), а в самые последние дни — доклад на конференции по пассажирскому транспорту, инициатором и организатором которой он был и которая состоялась в Ленинграде в первых числах апреля 1986 г. Кроме того, он много занимался готовившейся в то время в ЦЭМИ методикой оценки экономической эффективности новой техники, писал предложения по топливно-энергетическому балансу, занимался другой срочной работой.

Текст первых глав воспоминаний был просмотрен Леонидом Витальевичем, и он успел внести в него некоторые поправки, последние два раздела просмотреть он уже не смог. Диктовал он по памяти, не имея перед глазами ни своих работ, ни иных материалов. Часто в процессе диктовки он возвращался к предыдущему тексту, внося в него какие-то добавления и уточнения. Все это потребовало при подготовке воспоминаний к печати большой редакционной работы, в частности, в текст были включены необходимые ссылки на упоминаемые работы.

Впервые эти воспоминания были опубликованы в «Успехах математических наук». Хотя Леонид Витальевич, диктуя текст в 1986 г., когда рамки политической цензуры ещё не были сняты, во многих случаях и не говорил откровенно, ограничиваясь полунамёком, тем не менее при подготовке текста к печати год спустя, когда цензуры уже практически не было, редактор журнала О. А. Олейник настаивала на удалении всех, с её точки зрения, опасных мест. Тогда не помогло даже моё обращение к академикам А. Г. Аганбегяну и В. Л. Макарову. Последний написал в редакцию следующее: «Для меня представляется абсолютно бесспорным, чтобы «Мой путь в науке» был опубликован без всяких изменений и редакторской правки. Это исторический документ, и в публикации он должен оставаться

таковым... Что касается некоторых оценок или взаимоотношений между учёными, упомянутых в настоящих воспоминаниях, то это следует рассматривать как неотъемлемую часть текста. Зная по личному опыту, как Леонид Витальевич относился к им написанному, считаю публикацию «Моего пути в науке» в абсолютно полном виде элементарной данью уважения к его памяти». А. Г. Аганбегян также настаивал на публикации «без сокращений». Тем не менее О. А. Олейник вычеркнула из текста все «подозрительные намеки». Большая часть вычеркнутых мест была включена в английскую публикацию (L. V. Kantorovich. Selected Works. London: Gordon & Breach, 1996, vol. 1). В настоящей публикации все купюры восстановлены, а текст ещё раз сверен с первоначальным. Кроме того, мы сочли нужным сопроводить эту публикацию дополнительными комментариями.

22.10.2001

В. Л. Канторович

Я должен, прежде всего, извиниться за необычную для общества форму доклада. Я буду читать, сидя на месте, доклад будет посвящен не только математике, но и другим наукам и будет перебиваться воспоминаниями и некоторыми анекдотическими случаями. Формулы и теоремы будут лишь мелькать на слайдах.

Члены общества хорошо знают труды московских математиков, которых они слушали студентами и многократно встречали позже. Иногородних математиков знают гораздо меньше. Поэтому моя цель — как бы представить Математическому обществу. Впрочем, впервые такое представление произошло в январе 1930 г.,¹ когда состоялся мой первый доклад на обществе, но вряд ли кто-либо из присутствовавших тогда находится в аудитории.

Прежде чем перейти к конкретному изложению, я хотел бы кое-что сказать о себе, так сказать, заняться некоторой самокритикой. Я не эрудит. Отчасти это может быть связано с характером образования — в то время ни научных стипендий, ни научных ставок не было, поэтому и в свое аспирантское время, и в последующие годы научную работу мне пришлось совмещать с двумя-тремя педагогическими службами, тем более, что с 1930 года я был основным кормильцем семьи. Должен признаться, что и моя память, и способность к восприятию нового не намного выше среднего.

Некоторые делят математиков на математиков, обладающих по преимуществу проникающей силой, и математиков-концептуалистов. Я принадлежу ко второй категории. В общем, меня мало привлекали проблемы, поставленные другими, и знаменитыми проблемами я специально не занимался. Впрочем, те концепции, которые были выдвинуты, позволили не направленным сосредоточением сил, а попутно решить ряд известных проблем.

Наконец, для моей деятельности характерным является постоянное взаимопроникновение теории и практики, в отношении практики нередко далеко выходящее за пределы математики.

¹ Доклады Л.В.Канторовича и Е.М.Ливенсона на Московском математическом обществе состоялись 1 февраля 1930 г.

Дескриптивная теория функций

Мое поступление в университет в силу некоторого почти анекдотического случая, произошло так, что я приступил к занятиям лишь с середины ноября.² Поэтому первый курс у меня целиком ушел на учебную работу — необходимо было в оставшееся время подготовить и сдать значительный комплекс предметов.

Моя научная работа началась при переходе с первого курса на второй — для подготовки к занятиям студенческого научного кружка, которые профессор Г. М. Фихтенгольц намеревался начать со второго курса, мне была предложена тема — условия интегрируемости функции по Риману. В связи с этим я изучил текст разделов, относящихся к функциям вещественного переменного, по чуть ли не единственному в то время учебнику анализа — переведенному курсу Валле-Пуссена — и по классической книге Лебега об интеграле. При этом, не ограничиваясь предметом доклада, я поставил задачу об условиях совпадения верхнего риманова интеграла, нижнего риманова интеграла с лебеговым. Пришлось дать определение полунепрерывной функции, некоторый комплекс теорем о них, а условие состояло в том, что функция должна быть почти везде полунепрерывной, соответственно, сверху и снизу.

Эти результаты, естественно, оказались известными так же, как и попутно полученный результат — характеристика функций, которые могут быть колебаниями функций одной переменной — $\text{Osc} f(x)$. Это любая полунепрерывная сверху функция. Оказалось, что эту теорему пару лет назад доказал Е. М. Ливенсон, соавтор ряда моих дальнейших работ. Совсем короткое ее доказательство и наш совместный доклад на эту тему должны были войти в бюллетень студенческого научного кружка, который, однако, так и не был издан.

Студенческий кружок после одного-двух заседаний распался, но в это время Григорий Михайлович Фихтенгольц начал семинар по дескриптивной теории функций для третьего и четвертого курсов, который я стал посещать. Участниками семинара были Д. К. Фаддеев, И. П. Натансон, С. Л. Соболев, С. Г. Михлин³ и др.

Первым предметом семинара были классификации функций Бэра и Юнга. К ним относятся мои первые работы, и я хочу указать на их источник.

Известно, что, кроме рассмотрения одной производной в точке диффе-

²Леонид Витальевич поступал в университет в возрасте 14 лет. Поскольку для этого требовалось специальное разрешение, он был уверен, что не принят, и узнал о своем зачислении студентом из следующего письма, полученного 6 ноября 1926 г.: «Вторично. Студенту ЛГУ тов. Канторович Л. Правление Ленинградского госуниверситета извещает, что Вам надлежит пройти комиссию по платности 9 ноября 1926 г. Непрохождение в названный срок повлечет за собой исключение из числа студентов ун[иверсите]та без права восстановления. Одновременно уведомляем, что назначенная плата должна быть Вами внесена не позднее 9/XI-26 г. Невзнос платы вызовет те же последствия, что и неявка в комиссию. Зав. студ. отделом».

³С. Г. Михлин в своих воспоминаниях опровергает своё участие в этом семинаре и выражает сомнение по поводу участия в нём С. Л. Соболева.

ренцируемости, в каждой точке недифференцируемости можно рассматривать четыре производные — обобщенные производные, по ленинградской терминологии, или производные числа — *nombres dérivés*. Я поставил перед собой такую общую проблему: дать дескриптивную характеристику четверки функций, которые могут быть обобщенными производными непрерывной функции. Было известно, что это функции Юнга второго класса, и естественное условие, что незадевающие углы могут встречаться в виде исключения, то есть не более, чем в счетном числе точек (теорема Юнгов), должно быть соблюдено. Однако анализ этой проблемы потребовал определенной подготовки. В частности, так как верхняя и нижняя производные являются пределами соответствующих отношений, то возникла проблема, какие функции Юнга второго класса могут быть верхним и нижним пределами последовательности непрерывных функций.

Эта задача была поставлена для функций любых классов, включая трансфинитные, и было получено ее решение. Когда работа была подготовлена к печати, пришел последний, XI том *Fundamenta Mathematicae*, где были помещены работы Вячеслава Васильевича Степанова и его ученика Ю. А. Гольдовского [1], [2], в которых эти вопросы для функций Юнга второго класса были решены.

В связи с этим при окончательной подготовке к печати работу пришлось переделать, дать необходимые ссылки и ограничиться только публикацией теорем о функциях любых классов с некоторыми дополнительными коррективами и специализациями для функций второго класса, что обобщало и покрывало названные результаты московских авторов. Эта работа была опубликована в XIII томе *Fundamenta Mathematicae* [3] и доложена на семинаре проф. Г. М. Фихтенгольца.

Что касается общей проблемы, то часть результатов мною была получена тогда же, в 1928–1929 гг. Я предполагал даже докладывать о них на Всесоюзном математическом съезде в Харькове, но два моих доклада уже стояли в программе и, будучи студентом, я счел неэтичным включать еще и третий доклад. Работа была доведена до своей окончательной формы, в которой она была опубликована, позднее — она появилась в 1932 г. в Математическом сборнике [4]. Поставленная проблема не была решена полностью, были получены лишь частичные результаты, но все же достаточно содержательные и тонкие по методам доказательства. В частности, доказывалось, что для совершенных множеств меры нуль четверка функций, удовлетворяющих естественному условию Юнгов, является четверкой производных чисел Дини, то есть существует такая непрерывная функция на этом множестве, числа Дини которой совпадают с указанными функциями. Несколько изолированно стоит § 4 этой работы, где простыми методами доказывалось, что на любом совершенном множестве меры нуль две функции Юнга соответствующих типов являются верхней и нижней двусторонними производными непрерывной функции. К сожалению, опубликованная целиком только на русском языке, она осталась, видимо, неизвестной за рубежом, и в то время, как относительно дескриптивной характеристики множеств недифференцируемости функций имеется сравнительно большое число ра-

бот, эта работа не получила продолжения, и на нее, вплоть до настоящего времени, имеются лишь единичные ссылки.⁴

К этому же циклу примыкает несколько других небольших работ. Отмечу работу об универсальных функциях, содержащую решение двух проблем, поставленных проф. Фихтенгольцем, именно, существует ли для функций юнговского типа и для функций бэровского типа, конечных и бесконечных, универсальная функция того же типа. Функция двух переменных называется универсальной для данного класса, если при специализации одной из переменных получаются все функции этого класса. Для классов Юнга универсальную функцию удалось построить, а для классификации Бэра было доказано, что это невозможно ([5]–[7]).

Я хочу отметить эту работу, во-первых, потому, что о ней я делал свой первый доклад на Ленинградском физико-математическом обществе, председателем которого был чл.-корр. АН СССР Николай Максимович Гюнтер. Дело в том, что ее публикация предполагалась в журнале Общества и, согласно имевшейся традиции, я должен был предварительно выступить с докладом. Это было весной 1929 г. Любопытно, что на этом же заседании вторым был доклад С. Л. Соболева «Замечание по поводу работ Н. Н. Салтыкова, относящихся к уравнениям первого порядка с частными производными».

Во-вторых, эта работа позднее нашла косвенное отражение в моих прикладных работах по математическим машинам. Именно, в «функциональном преобразователе», изобретение которого относится примерно к 1948 г., была сделана специальная коммутационная доска, которая так и называлась — «универсальная функция». На этой доске одновременно помещалось десять функций (синус, логарифм, тангенс, экспоненциальная и др.), и специализация параметра позволяла получать нужную в данный момент функцию, так что сам термин «универсальная функция» здесь было вполне уместно употребить. Конечно, эти работы конкретно не связаны, но идейно близки.

Наконец, в-третьих, в этой работе было использовано абстрактное понятие аналитической операции над множествами, примыкающее к следующему циклу работ.

Упомяну вскользь, что после агитационной поездки Павла Сергеевича Александрова в Ленинград в 1929 г. с циклом лекций по топологии у нас началась некоторая работа в этом направлении. Андрей Андреевич

⁴ На эту работу обращает внимание Н. Н. Лузин в своем пленарном докладе «Современные проблемы теории функций действительного переменного» на математическом съезде 1934 г. Первый раздел, «Метрическая теория функций», начинается так: «Среди работ этого рода следует, в первую очередь, отметить исследования по принципам дифференциального исчисления. Известно, что уже давно был предложен ряд критериев, необходимых или достаточных для того, чтобы данная функция $f(x)$ была точной производной. Наиболее глубокие результаты в этом направлении получены недавно Л. В. Канторовичем, поставившим проблему отыскания критериев для того, чтобы четыре заданных функции: $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ были для каждого x четырьмя производными числами Дини от некоторой функции $F(x)$ » (Бюллетень второго Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде, 24-30 июня 1934 г. Л.: Изд. АН СССР, 1934, с. 8-9).

Марков открыл топологический кружок, где, по преимуществу, изучалась теоретико-множественная топология. Топологией я так и не увлекся, но, участвуя в работе кружка, определенное представление о ней получил. Для меня важно, что с этого времени у меня началось знакомство и контакт с замечательным математиком А. А. Марковым (мл.), отличительной особенностью которого было умение оценить значимость новых направлений математики и стремление привлечь к ней внимание независимо от собственных научных интересов.

Функции над множествами, аналитические (александровские) и проективные множества

Известно, что в период примерно с 1915 по 1925 гг., исследования по аналитическим множествам (A -множествам или александровским множествам), открытым и изученным П. С. Александровым, М. Я. Суслиным и Н. Н. Лузиным, занимали центральное место в работах многих московских математиков (А. Н. Колмогоров, П. С. Новиков и др.). В Ленинграде эти работы были почти неизвестны вплоть до 1927 г., когда состоялся Всероссийский математический съезд. На участвовавшем в нем проф. Г. М. Фихтенгольца эти работы произвели большое впечатление, и в 1928–1929 гг. он открыл семинар по изучению A -множеств и смежных вопросов. В его работе участвовали Д. К. Фаддеев, С. Л. Соболев, С. Г. Михлин⁵, В. Н. Фаддеева, И. П. Натансон и ряд других математиков. Семинар посещали также я и Е. М. Ливенсон, который поступил в университет на три года раньше меня, но по не зависящим от него обстоятельствам прерывал обучение и формально считался на моем курсе, кончал университет он вместе со мной.

На семинаре изучались журнальные статьи, в том числе несколько мемуаров Н. Н. Лузина, соответствующие разделы книги Хаусдорфа (2-е немецкое издание 1927 г.), где впервые было дано оригинальное монографическое изложение этой теории (книга Н. Н. Лузина [8] об этих проблемах вышла позднее, в 1930 г.).

В Москве эта область уже начала выходить из моды. Аналитические множества были к тому времени изучены достаточно досконально, однако по проективным множествам результатов почти не было, хотя они тоже имеют естественное происхождение. В частности, интересной была проблема, впоследствии фигурировавшая в книге Н. Н. Лузина, о взаимоотношении двух путей расширения понятия аналитических множеств. Один путь — геометрический — скажем, множество из второго класса проективных множеств получается как проекция множества, дополнительного к аналитическому. Другой путь — поочередным применением александровской A -операции — применить ее к аналитическим множествам, затем к борелевым, затем к дополнениям аналитических множеств (CA -множествам), затем к их дополнению и т. д.

⁵См. примечание 3.

В процессе работы семинара было, собственно, два продвижения. Во-первых, для δs -операций Хаусдорфа был поставлен вопрос об изучении множества индексов, то есть систем последовательностей, по которым производится суммирование множеств. Оказалось удобным их изучать с помощью изображения на вещественной прямой, тогда их можно было рассматривать уже не как множества последовательностей, а как подмножества множества рациональных чисел. Были получены некоторые теоремы о том, как меняются множества индексов при объединении соответствующих множеств, при составлении сложной операции и т. д. Эта работа была проделана еще в первый год занятий семинара Е. М. Ливенсоном и мной. Между прочим, идея интерпретации индексных множеств как подмножеств множества иррациональных чисел, была предложена Д. К. Фаддеевым, хотя он этими вопросами специально не занимался.

Во-вторых, ставился вопрос о представлении проективных множеств. Для A -множеств было известно красивое представление через δs -операцию с кортежами, для проективных ничего подобного не существовало. Мне удалось получить представление для проективных множеств второго класса, оно допускало и распространение. Эта работа была представлена через академика Н. Н. Лузина в *Comptes Rendus* и опубликована в 1929 г. [9].

Пожалуй, в следующем учебном году семинар уже не продолжался, но мы с Е. М. Ливенсоном осенью провели интенсивную работу. В частности, существенное значение имела простая идея схемы: класс множеств, получаемых в результате δs -операции над данными множествами (если базу δs -операции изобразить множеством вещественных чисел), имеет простую двумерную геометрическую картину, из которой можно легко извлечь различные следствия.

Мы сами себе не поверили, что из этой группы теорем непосредственно вытекает решение одной проблемы Н. Н. Лузина: все множества системы Е. А. Селивановского, то есть полученные аналитическим путем, являются проективными множествами не выше второго класса, вернее, принадлежат пересечению множеств второго класса и дополнительного класса. Мы даже решили, что раз получился такой результат, то что-то неверно, но тщательная проверка полностью его подтвердила. Попутно была решена и более легкая проблема о борелевской надстройке над системой A -множеств и SA -множеств — оказалось, что и они укладываются в пересечение множеств второго и дополнительного классов.

Обе эти проблемы фигурировали в книге Н. Н. Лузина, вышедшей в 1930 г. в Париже в серии Бореля [8], и в ней имеется примечание, что, как Николай Николаевич узнал из письма Г. М. Фихтенгольца, они решены в наших работах.⁶ Работы были кратко анонсированы в Докладах французской

⁶Эти ссылки были внесены Н. Н. Лузиным уже в корректуру книги, появившейся почти сразу после публикации работ в *Comptes Rendus*. Работы отмечены и в цитированном уже докладе Н. Н. Лузина (см. примечание 4) на съезде тридцать четвертого года: «Здесь нужно в первую очередь упомянуть о прекрасных результатах, полученных Л. В. Канторовичем и Е. М. Ливенсоном в области проективных множеств» (раздел 2, «Дескриптивная теория функций»).

академии [10, 11], а затем мы взялись за написание большого мемуара. Первые две части были опубликованы в *Fundamenta Mathematicae* [12], третью часть — то ли я занялся другими проблемами, то ли у Е. М. Ливенсона были какие-то осложнения⁷ — написать не удалось. Впрочем, третья часть должна была быть посвящена самим проективным множествам, и ее результаты представляли совершенно непосредственное следствие результатов первых двух частей.

В январе 1930 г.⁸ по приглашению П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова мы выступили с докладами на эту тему в Московском математическом обществе. Мы были очень любезно приняты, председательствовал, если не ошибаюсь, И. И. Привалов, как всегда много вопросов задал В. В. Степанов. После доклада мы были приглашены на чай к Андрею Николаевичу и Павлу Сергеевичу, не помню точно на чью квартиру, как будто на Трубниковскую, к А. Н. Колмогорову (было немного и не чая). При этом Андрей Николаевич сообщил, что у него имеется старая рукопись, относящаяся примерно к 1921–1922 гг., которую он хочет нам передать для использования и частичного ее изложения в нашем мемуаре.⁹

В этой рукописи содержалось определение аналитической операции над множествами, типа δs -операции Хаусдорфа, но, по-видимому, введенной раньше, чем у Хаусдорфа (небольшая часть этой работы была опубликована в 1928 г. в Математическом сборнике [4]). Мы посвятили этой работе одну из глав второй части Мемуара — «Об R -операциях А. Н. Колмогорова». Это не было буквальным воспроизведением — некоторые его теоремы были даны с другими доказательствами, приведен ряд дополнительных теорем, часть рукописи не нашла отражения в нашей работе. Андрей Николаевич категорически запретил указывать время написания его рукописи. Нашей ошибкой было то, что по молодости мы не включили эту работу в полное изложение, и впервые целиком она вышла уже в сочинениях А. Н. Колмогорова.

Поскольку теоремы о проективных множествах предполагалось изложить в третьей части Мемуара, которая не была опубликована, и о них говорилось только во введении, примерно в 1936 г. академик Казимеж Куратовский опубликовал доказательства этих теорем.¹⁰ Это вынудило нас опубликовать в 1937 г. в *Comptes Rendus* небольшую заметку [14], в которой были приведены полные доказательства этих теорем, каждое из которых требовало лишь одного абзаца и опиралось на опубликованные результаты Мемуара.

Об этих работах мы докладывали также на Первом всесоюзном мате-

⁷Вероятно, и то и другое. В письме А. Н. Колмогорову от 10.04.1931 Леонид Витальевич пишет: «Я сам мемуаром заканчиваю свои работы по этим вопросам и начал заниматься другим». Прервала публикацию и высылка из Ленинграда отца Е. М. Ливенсона, вынудившая его переехать в Уфу.

⁸См. примечание 1.

⁹См. переписку Л. В. Канторовича и А. Н. Колмогорова 1930–1932 гг.

¹⁰S. Kuratowski. les ensembles projectifs et l'opération (A) // *CR Acad Sci (Paris)*, 1936, t. 203, n. 19, p. 911–913; K. Kuratowski. Les ensembles projectifs et l'induction transfinie // *fund. Math.*, 1936, t. 27, 5. 269–276.

матическом съезде, состоявшемся в Харькове в 1930 г. Это было большим событием для нас, но доклад прошел не очень удачно. Дело в том, что параллельно на другой секции был поставлен доклад Бориса Николаевича Делоне о четырехмерном кино и все повалили на это кино, даже специалисты по теории множеств, хотя они и извинились перед нами. С кино конкурировать трудно.

Съезд прошел очень интересно, я познакомился (или встретился, во всяком случае) с такими математиками, как Адамар, Монтель, Бляшке, Фреше, Данжуа, а также с русскими математиками. Председателем был С. Н. Бернштейн, с которым я познакомился раньше, а из более молодых — Марк Григорьевич Крейн, Лев Семенович Понтрягин, Александр Осипович Гельфонд,¹¹ Михаил Алексеевич Лаврентьев, Мстислав Всеволодович Келдыш, который тогда был еще студентом третьего курса, а я уже был перед получением диплома.¹²

В переводе на русский язык книги Хаусдорфа [15] в редакции П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова имеется ссылка на наши работы и краткое их изложение. Впоследствии, как известно, ряд более тонких исследований в этом направлении был осуществлен П. С. Новиковым, Матукети Кондо, а также А. А. Ляпуновым и другими авторами.

Конструктивная теория функций

Этими вопросами я и занимался не так много, да и результаты не очень значительны, но все же творческая работа в этой области имела для меня большое значение в дальнейшем.

Работа началась случайно. В ожидании ученика, который запаздывал, я просматривал XIII том *Fundamenta Mathematicae* и увидел в нем заметку московского математика И. Н. Хлодовского, связанную с полиномами С. Н. Бернштейна. В ней я впервые увидел полиномы Бернштейна, которые были им предложены в 1912 году для элементарного доказательства известной теоремы Вейерштрасса, использующего вероятностные соображения. Мне

¹¹ «Следует отметить, что упоминание Леонидом Витальевичем в этом ряду М. Фреше и А. О. Гельфонда не подтверждается официальным перечнем участников» (С. С. Кутателадзе. Четыре математических съезда в жизни Л. В. Канторовича // Оптимизация, 1991, 50 (67), с. 135-136).

¹² Леонид Витальевич рассказывал, что его знакомство с М. В. Келдышем началось с конфликта. Гуляя по Харькову, они с кем-то из ленинградских математиков зашли в кафе и сели за столик. Через некоторое время туда вошел бойкий юноша, который тоном комсомольского вожака потребовал, чтобы они покинули кафе: «Сейчас придут обедать делегаты математического съезда!» Ленинградцы, будучи такими же участниками съезда, сочли его требование неосновательным. По счастью, конфликт вскоре разрешили подошедшие взрослые (Канторовичу тогда было 18, Келдышу — 19 лет) московские математики, знавшие Леонида Витальевича. Возможно, что этот эпизод наложил отпечаток на их дальнейшие отношения, которые всегда оставались несколько натянутыми, хотя почти со всеми московскими математиками, во всяком случае в тридцатые годы, у Леонида Витальевича были очень теплые отношения, в том числе и с сестрой Келдыша Людмилой Всеволодовной и ее мужем П. С. Новиковым.

сразу подумалось, а нельзя ли в этих полиномах заменить значение функции в отдельных точках на более устойчивые средние значения функции в соответствующем интервале.

Это оказалось возможным, и полиномы в таком виде могли быть написаны уже не только для непрерывной, но и для любой суммируемой по Лебегу функции. Мне удалось показать, что такие полиномы, как я их назвал, полиномы в форме С. Н. Бернштейна, сходятся почти везде к значениям порождающей функции.

Без труда были построены такого же рода полиномы для функций первого класса Бэра и установлена их сходимость всюду, за исключением множества точек первой категории. Соответствующие две заметки были опубликованы в Докладах Академии наук за 1930 г. [16] и составили содержание моего второго доклада на Всесоюзном математическом съезде. Там же было отмечено почти очевидное следствие, относящееся к первой теореме, что последовательность самих полиномов Бернштейна для любой абсолютно непрерывной функции допускает почти везде почленное дифференцирование.

В другой небольшой работе [17], также используя полиномы в форме С. Н. Бернштейна, я доказываю возможность аналогичного представления произвольной измеримой функции во всех ее точках аппроксимативной непрерывности. К рассматриваемому циклу относится также работа [18], в которой решается задача о том, насколько ухудшится приближение непрерывной функции многочленами, если потребовать, чтобы коэффициенты этих многочленов были целыми числами. Эти исследования были продолжены Александром Осиповичем Гельфондом в 1955 году [19].

Наиболее интересной из этого цикла является работа о сходимости полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала [20]. Именно, в ней доказывается, что для аналитической, а также для кусочно-аналитической функции сходимость обычных полиномов Бернштейна имеет место в надлежащей области голоморфности функции. В простейшем случае, для аналитической функции — это наибольший эллипс с фокусами 0 и 1, в котором функция остается регулярной. Правда, в доказательстве одной из теорем имеется лакуна — во время корректуры мне казалось, что я ее закрыл, и не вносил правки в печатный текст. Позже выяснилось, что это не совсем так, но я уже не имел возможности к этому возвращаться.

Факт сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области оказался неожиданным даже для самого Сергея Натановича. Им было опубликовано несколько работ, в которых эти исследования были продолжены и получены более тонкие и точные результаты¹³ [21]–[23].

Для меня важно, что в связи с этими работами я более глубоко ознакомился с конструктивной теорией функций, прочел основной мемуар С. Н. Бернштейна — его знаменитую докторскую диссертацию, хорошо на-

¹³В работе [23] С. Н. Бернштейн пишет: «Вопрос о сходимости в комплексной области многочленов... впервые был рассмотрен Л. В. Канторовичем в прекрасной работе «О сходимости последовательности полиномов С. Бернштейна вне основного промежутка». После этого я посвятил тому же вопросу две статьи». [23]

писанную книгу Валле-Пуссена, а также неплохой курс В. Л. Гончарова. Творческое знакомство с конструктивной теорией функций было мною в дальнейшем многократно использовано в различных работах по чистой и прикладной математике.

Наконец, в заключение отмечу, что в вышедшей в ФРГ небольшой специальной монографии Г. Р. Лоренца¹⁴ часть моих результатов изложена, часть опущена, но имеются и неточности, в частности, теорема о почленной дифференцируемости последовательности полиномов Бернштейна приписана другому лицу.

Приближенные методы анализа

В конце двадцатых — начале тридцатых годов в связи с потребностями индустриализации огромное расширение получила вузовская сеть. В десятки раз увеличился прием студентов, число вузов. Многие вузы разделились. Так, на базе Ленинградского политехнического института было создано девять индустриальных институтов. Потребовалось большое число преподавателей, в том числе математиков. Например, первое время кафедрами математики во всех девяти выделившихся из Политехнического институтах заведовал Р. О. Кузьмин. Поэтому я по окончании университета получил семь различных предложений, так же, как и мои товарищи.

Выпуски тогда были небольшие, наш выпуск состоял из десяти человек, предыдущий — из семи. Правда, в их число входили С. Л. Соболев, С. А. Христианович, С. Г. Михлин, Б. Б. Девисон, Гоарик Амбарцумян (сестра В. А. Амбарцумяна), В. Н. Замятина (Фаддеева).

Будучи аспирантом университета, я одновременно работал в строительном институте, в первый год в должности ассистента, во второй — доцента, а на третий, что совпало с досрочным окончанием аспирантуры, — профессора. Одновременно в 1932 г. я был избран на должность профессора и заведующего кафедрой Института промышленного транспорта.¹⁵

Не буду приводить различных анекдотических происшествий, случавшихся в ту пору со мной. Как-то, придя на лекцию для нового потока, я поднялся на кафедру в еще не утихомирившейся аудитории. Тотчас пара

¹⁴ Г. Р. Лоренц был до войны доцентом кафедры анализа Ленинградского университета и учеником Л. В. Канторовича. Так, на состоявшейся в сентябре 1937 г. сессии Группы математики АН, посвященной функциональному анализу, где выступили с докладами сам Леонид Витальевич и его ученики Б. З. Вулих, М. К. Гавурин, выступил и Г. Р. Лоренц с докладом «Топологическая теория полуупорядоченных пространств» (см. сообщение об этом в УМН, 1938, вып. 5, с. 258). Совместная работа Л. В. Канторовича и Г. Р. Лоренца была направлена в 1940 г. в Известия Томского университета, однако начавшаяся война помешала этой публикации (в архиве Леонида Витальевича сохранились рукопись двух последних параграфов этой статьи и ее резюме). Во время войны Г. Р. Лоренц, немец по происхождению, перешел линию фронта и после войны проживал в Западной Германии.

¹⁵ В качестве одного из возможных претендентов на заведование этой кафедрой фигурировал С. Н. Бернштейн, переезжавший в это время в Ленинград (письма И. П. Натансона от 13 и 24 июля 1932 г.).

студентов стала стягивать меня — «Садись на место! Сейчас ведь профессор придет». Часто, однако, анекдотические случаи, происходившие в ту пору с молодыми преподавателями, пересказывались как произошедшие со мной.

Строительный институт, выделившийся из Политехнического, имел довольно сильный преподавательский состав. Его возглавлял известный специалист по теории упругости и строительной механике академик Борис Григорьевич Галёркин, у которого был целый ряд талантливых молодых учеников. Установились научные контакты. Это побудило меня познакомиться с прикладной тематикой, и, в свою очередь, аспиранты и молодые преподаватели технических кафедр стали в своих работах широко использовать новые численные методы, в том числе и разработанные мной.

К этому же времени относится мое знакомство с Алексеем Николаевичем Крыловым, фигурой очень колоритной. Кораблестроитель и математик, правда, более классического толка, он неоднократно представлял по предложению В. И. Смирнова мои работы в Доклады АН. До выборов 1929 г. он был единственным математиком в Академии наук — А. М. Ляпунов, А. А. Марков и В. А. Стеклов умерли незадолго до этого, Я. В. Успенский был в эмиграции.

Его книгу «Теория балок, лежащих на упругом основании» [24] я переизложил по-новому, в интегралах Стильтьеса обычных несобственных и интегралах Стильтьеса высшего порядка [25, 26]. С этим связано несколько работ об интеграле Стильтьеса, которые интересны тем, что относились уже к теории обобщенных функций или теории распределений, правда, конечного порядка [27]. Интерес к этим вопросам стимулировал Николай Максимович Гюнтер. Он читал большой курс, который потом вышел пятисотстраничным мемуаром об интеграле Стильтьеса [28], а его основными слушателями были С. Л. Соболев и я. И в дальнейшем теория обобщенных функций привлекала мое внимание.

Одновременно с расширением вузовской сети были открыты и многие научно-исследовательские и прикладные институты, куда также привлекались математики. При этом наибольшая заинтересованность была не в теоретическом знании, не в математическом исследовании классических проблем, а в создании и разработке методов, позволяющих эффективно производить расчеты, необходимые при проектировании крупных объектов — мощных турбин, самолетов, сложных строительных сооружений. Поэтому проблемы приближенных методов анализа стали привлекать все большее внимание.

Следует сказать, что в то время как приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, квадратур были хорошо разработаны еще со времен Гаусса и Эйлера, по приближенным методам высшего анализа — уравнениям в частных производных, интегральным и функциональным уравнениям — имелись лишь единичные работы (Рунге, Нистрем, Ритц).

В связи с этим Владимиром Ивановичем Смирновым в 1931 году был открыт специальный семинар по приближенным методам высшего анализа.

Кроме меня и В. И. Крылова в нем приняли участие Г. М. Голузин и П. В. Мелентьев.

В это же время В. И. Крылов и я работали над курсом вариационного исчисления, составленным под руководством В. И. Смирнова по его лекциям, читавшимся студентам-физикам, лекциям Н. Г. Чеботарёва и литературным источникам. Этот курс [29] был выпущен издательством КУБУЧ в 1933 году, некоторое время служил основным учебником, и математики старшего поколения вспоминают, что именно по нему они изучали вариационное исчисление.

Семинар В. И. Смирнова начался с ознакомления с немногочисленными работами по приближенным методам — работами о методе Ритца, по разностным уравнениям, работами Нистрема по интегральным уравнениям. Вскоре, однако, началась самостоятельная работа участников семинара.

В 1932 году мною был предложен новый вариационный метод [30], являющийся существенным обобщением и видоизменением метода Ритца. В книге Л. Э. Эльсгольца «Вариационное исчисление» [31] этому методу посвящен отдельный параграф под названием «Метод Канторовича». В методе Ритца решение разыскивается в виде линейной комбинации некоторых априорно заданных функций с неопределенными коэффициентами, которые находятся из условия минимизации некоторого интеграла, таким образом, решение уравнения в частных производных или задачи об экстремуме двойного интеграла сводится к матричной задаче. В предложенном мною методе форма разыскиваемого решения включает и произвольные функции одного переменного, благодаря этому часть структуры приближенного решения берется в заданном виде, а часть определяется из самой задачи — минимизации интеграла, превращающегося в одномерную задачу. Этот метод численного решения и качественного исследования задачи оказался особенно эффективным для узких областей и во многих случаях позволял находить не только хорошее численное решение, но и приближенное аналитическое решение исходной двумерной задачи.

Эта идея была применена и при создании метода, аналогичного методу Галёркина — Бубнова, который основан не на вариационных принципах, а на решении моментных уравнений [32]. Та же идея была позднее использована А. А. Дородницыным [33], а также в работах его учеников О. М. Белоцерковского [34, 35], П. И. Чушкина [36] и др.

Предложенные методы сразу стали использоваться в Строительном институте, где я преподавал, применялись они и за рубежом [37]. Распространению нашего вариационного метода существенно способствовал мой доклад, поставленный по инициативе Анатолия Исаковича Лурье на заседании Механического общества, кажется, в 1935 г. Интересные приложения и видоизменения метода предложил сам А. И. Лурье [38], он использовался также в работах большого числа его учеников, в частности, в работах Н. Х. Арутюняна [39, 40], ставшего впоследствии Председателем Президиума Верховного Совета Армении.

Другая моя работа была посвящена вопросам приближенного конформного отображения круга на область, близкую к нему, или вообще области

на близкую к ней [41, 42]. Идея метода состояла в том, что отображающая функция разыскивается в форме ряда по степеням малого параметра. При этом члены ряда находились либо из бесконечной системы линейных уравнений, либо последовательными приближениями. Потребность в таком методе определялась распространившимися к тому времени применениями методов теории функций комплексной переменной в расчетах по гидродинамике (М. А. Лаврентьев, В. В. Голубев). В частности, они широко применялись в ЦАГИ, так что предложенный метод нахождения отображающих функций имел большое прикладное значение. Например, М. А. Лаврентьев очень ценил эту работу.¹⁶

Было проведено строгое доказательство сходимости этого метода в определенных границах изменения параметра. Этот результат, а также его доказательство, были использованы в известном цикле работ Г. М. Голузина по теории однолистных функций¹⁷ (между прочим, только в первой работе была соответствующая ссылка, а дальше он ссылался только на свои работы [43]).

Работа о приближенном конформном отображении, еще до публикации ее в Математическом сборнике, была включена В. И. Смирновым в вышедший в 1933 г. третий том его классического руководства «Курс высшей математики» в виде отдельного параграфа — «Способ сопряженных тригонометрических рядов». Мной была сделана попытка распространить этот метод на многосвязные области, но соответствующая работа была написана довольно неряшливо и нуждалась в коренной переработке. Она была опубликована [44], но в своей работе 1937 года я указываю, что ей нельзя верить [45]. Методом приближенного конформного отображения я занимался и в дальнейшем, ему посвящен ряд статей моих аспирантов.

Во время визита Жака Адамара в Ленинград, кажется в 1933 г., на встрече с ним в кабинете ректора университета В. И. Смирнов сделал краткий доклад о нескольких достижениях ленинградских математиков, в том числе рассказал и о работе о приближенном конформном отображении. Работа заинтересовала Адамара, и он шутя высказал опасение, как бы Канторовича не постигла судьба Галуа. В ответ кто-то сказал, что у меня не такой агрессивный характер.

Перехожу к нашей совместной с В. И. Крыловым книге «Приближенные методы решения уравнений в частных производных» [46]. Хочется отметить любопытный случай, когда плановые предназначения сыграли положительную роль. В проспекте, выпущенном «Издательством общетехнической литературы и номаграфии», помимо перечня конкретных предполагавшихся к изданию книг, указывался ряд тем, по которым издательство готово вы-

¹⁶ «В направлении приближенного представления конформных отображений у нас работа началась лишь в самые последние годы. Отметим здесь, прежде всего, работу Канторовича, в которой автор, пользуясь тригонометрическими рядами, дает сходящийся процесс для получения конформного отображения круга на односвязную область, близкую к кругу. Метод Канторовича, на наш взгляд, имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами для решения той же задачи». (М. А. Лаврентьев. Теория аналитических функций // Математика в СССР за 15 лет. Л.: ГТТИ, 1932, с. 52).

¹⁷ Эти работы Г. М. Голузина были удостоены Сталинской премии в 1948 г.

пустить книги, но не имело их в портфеле, в том числе и по приближенному решению уравнений в частных производных. Это заметно облегчило формальности, связанные с заключением договора и прохождением рукописи, но, кроме того, имело для нас и определенное психологическое значение¹⁸. Нужно сказать, что к тому времени ни одной подобной книги общего характера в мировой научной литературе не имелось. В этой работе, даже структура которой нам в первый момент не была ясна, была изложена журнальная литература по этим вопросам и собственные уже продвинутые разработки.

В процессе работы над книгой были проведены и новые исследования (погрешности, сходимости), возник ряд новых методов, так что многие результаты впервые были опубликованы только в самой книге. Так, в первой главе, посвященной методу Фурье, был развит метод решения, основывающийся на сведении граничной задачи к бесконечной системе линейных уравнений и была изложена, в основном оригинальная, теория бесконечных систем.¹⁹ Здесь же были изложены непосредственно к этому примыкавшие методы улучшения сходимости рядов, полученных при приближенном решении граничных задач — вопрос, к которому я многократно возвращался и позднее [47].

Вторая глава, посвященная приближенному решению интегральных уравнений Фредгольма, содержала практически впервые данные оценки погрешности, возникающей в результате замены интегрального уравнения системой линейных уравнений. Были предложены методы последовательного приближения и аналитического продолжения, применения интегрального уравнения к решению задачи Дирихле, а также изложен метод английского математика Бэтмена. Пожалуй, это было первое систематическое изложение приближенных методов решения интегральных уравнений.

¹⁸ Договор на издание этой книги был заключен 28 июня 1933 г. с обязательством представить рукопись к 1 января 1934 г., однако к этому времени рукопись не была готова, и издательство даже подало на авторов в суд. Вопрос был решен полюбовно — срок представления рукописи продлен.

¹⁹ С этим разделом книги связана одна история, упоминаемая, в частности, в воспоминаниях П. Я. Кочкиной (Наука, люди, годы. М: Наука, 1988). Профессор Б. М. Коялович обратился с заявлением в авторско-правовое бюро Ленинградского дома ученых с требованием «привлечь Л. В. Канторовича и В. И. Крылова к товарищескому суду по обвинению в плагиате, отягченном полемическими выпадами». Он пишет: «авторы одной рукой щедро черпают из моей работы наиболее оригинальные и плодотворные мысли, а другой рукой — так же щедро осыпают ее клеветническими выпадами». Л. В. Канторович в своем ответе сообщает, что «несмотря на свой значительный объем (120 стр.), статья Кояловича содержит очень немного новых результатов (за исключением неверных)», и поэтому при ее цитировании авторы были вынуждены указывать либо на первоисточник результатов, либо на их ошибочность. Единственный упрек в плагиате, который мог бы считаться справедливым, относится к «двухстрочному замечанию в конце п. 3», и, пишет Леонид Витальевич, «если Б. М. Коялович считает это замечание высшим достижением всей своей научной деятельности, то я готов в следующем издании нашей книги снабдить его специальным примечанием соответствующего содержания». Поскольку Коялович продолжал свои обвинения, в конце концов, в апреле 1938 г. дело разбиралось на Президиуме группы математики АН, который установил, что «Б. М. Коялович вместо того, чтобы продумать возражения своих оппонентов, просто от них отмахивался, пытаясь дискредитировать своих оппонентов, неосновательно приписывая им ошибки».

Глава о методе сеток основывалась на имевшейся литературе и, пожалуй, была недостаточно развернута.²⁰ В главе о вариационных методах были изложены необходимая теория уравнений эллиптического типа и связанных с ними вариационных задач, классический метод Ритца. Специальный параграф был посвящен новому методу приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, о котором уже шла речь.

Большой раздел книги относился к методам приближенного конформного отображения. Здесь, наряду с методом Бибербаха и аналогичным ему методом ортогональных полиномов, значительное внимание в изложении уделено методу разложения в ряд по степеням малого параметра, о котором уже говорилось, а также аналогичному методу, разработанному В. И. Крыловым для случая отображения области на круг. Излагался также интересный метод П. В. Мелентьева, математика и изобретателя, сочетавший графические и аналитические приемы. Отдельный параграф посвящен задаче отображения полуплоскости на область, ограниченную многоугольником. Классическая формула Кристоффеля – Шварца теоретически дает точное решение этой задачи, однако, фактическое нахождение параметра представляет немалые трудности. Здесь полезной оказалась идея применения метода Ньютона, разработанная в диссертации Н. П. Стенина [48]. В последней главе даются приложения методов приближенного конформного преобразования к решению основных задач (Коши, Неймана, Дирихле и др.) для канонических областей.

В книге был дан и ряд других небезынересных методов. Предложен метод коллокации (совпадения) для уравнений в частных производных, когда исходное уравнение заменяется на систему уравнений, относящихся к отдельным линиям, то есть требуется, чтобы приближенное решение удовлетворяло уравнению лишь на нескольких линиях [49]. Собственно, та-

²⁰ В УМН (1938, вып. 5, с. 263–265) помещена рецензия Д. Ю. Панова: «Книга посвящена чрезвычайно интересным и актуальным вопросам прикладной математики. Развитие техники уже давно поставило на очередь решение таких математических проблем, которые далеко выходят за рамки элементарных методов анализа. К числу таких проблем в первую очередь следует отнести практическое решение дифференциальных уравнений в частных производных. Трудно в настоящее время указать какую-нибудь отрасль промышленности, в которой не приходилось бы сталкиваться с необходимостью решения таких задач, не говоря об авиационной промышленности, энергетике, связи и т. п., где любая исследовательская работа упирается в вопросы этого рода... До сих пор в мировой научной литературе не только не существовало книги, в которой были бы собраны практические методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, но даже не имелось сколько-нибудь полного обзора работ в этой области...». Вместе с тем рецензент отмечает, что, «читая книгу, нельзя отделаться от впечатления, что весь приводимый авторами материал делится на две категории: а) материал, интересный для авторов, и б) материал неинтересный, помещаемый для полноты, в порядке «отписки». К первой категории относятся главы (между прочим, — лучшие главы книги), посвященные методам и приемам решения, связанным с прекрасными работами Л. В. Канторовича. Ко вторым — почти все остальное...» (О неравноценности глав, написанных каждым из соавторов, говорил и С. Г. Михлин). Рецензент язвительно отмечает также некоторую небрежность в ссылках, которая приводит «даже к анекдотам. Так, авторы со спокойным сердцем превращают одну женщину — Хильду Поллачек-Гейрингер в двух мужчин — Поллачека и Гейрингера». Заключая рецензию, Панов пишет, что книга безусловно «представляет собой крупное явление в нашей математической литературе».

кой же характер носит метод Нистрёма для интегральных уравнений. Для обыкновенных дифференциальных уравнений он был предложен в работе Дункана [50], вышедшей в 1937 г. Наша работа была написана в 1934 г., так что вопрос о приоритете остается неясным. Мне кажется, этот метод представляет интерес.

Другой метод основан на том, что приближенное решение уравнения в частных производных с граничной задачей эллиптического типа разыскивалось как функция, имеющая различные аналитические задания в разных частях области с требованием сохранения непрерывности и гладкости. Этот метод напоминает много позже появившийся метод сплайн-функций. Взаимосвязями этих методов занимался недавно харьковский математик, украинский академик В. Л. Рвачев.

Заканчивая обзор работ по численным методам, замечу, что у меня было и несколько элементарных работ, относящихся к классическому приближенному анализу. Так, в 1934 г. я опубликовал короткую заметку о вычислении определенных интегралов и некоторых методах выделения особенностей [17], где предлагалось выделить из функции особенную, нерегулярную часть, а к оставшейся части, сравнительно регулярной, применить одну из квадратурных формул. В таком виде эта заметка выглядит действительно элементарной, так что один из моих друзей-математиков, С. В. Валландер, даже удивлялся: «Что же вы, Леонид Витальевич, такой элементарный материал о вычислении нескольких интегралов помещаете в Математическом сборнике?».

Однако применение этого же приема к интегральному уравнению отнюдь не очевидно, и тот факт, что негладкое уравнение заменяется гладким, имеет большое значение. Например, в расчетах, связанных с прикладными работами, за которые мне была присуждена Правительственная премия в 1949 г., использование этого приема при решении уравнений «перехода» дало не только большой выигрыш в размерности решаемой системы. Параллельно расчеты велись еще в одном авторитетном бюро по сорока квадратурным точкам, у нас же применялось всего два-три узла, а результат получился точнее, причем и качественно иной, что имело принципиальное значение. В этой области физики «элементарный» прием применялся в течение многих лет после нашей работы.²¹ К таким же элементарным работам относится заметка о методе вычисления интегралов для четных и нечетных функций, который позволяет вдвое сократить число узлов [51].

В начале 1935 г., уже после фактического написания книги по приближенным методам, я получил интересное и почетное приглашение от директора НИИММ МГУ А. Н. Колмогорова. Предлагалась рассчитанная на месяц научная программа и контакты с московскими математиками. Программа, в частности, предполагала чтение небольшого специального курса. В качестве темы я избрал приближенные методы решения уравнений в част-

²¹ Эти расчёты были связаны с созданием советской атомной бомбы. Как рассказывал академик В. С. Владимиров? участвовавший в этой работе, задача состояла в определении критической массы плутония. Параллельные расчёты велись у М. В. Келдыша в Отделе прикладной математики МИАН.

ных производных. Нужно сказать, что если в Ленинграде прикладная математика традиционно пользовалась вниманием и уважением, то в Москве в то время отношение к ней было иным (впрочем, в Киеве тогда интересные исследования вели Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов). Характерный разговор произошел у меня с Л. С. Понтрягиным, с которым я был в ту пору в хороших отношениях.²² Направляясь на мою лекцию, перед которой он должен был представить меня аудитории, Понтрягин спросил: «Почему ты, Леонид, занялся вычислениями, у тебя ведь были такие интересные теоретические работы?» И добавил, что в Москве за вычисления брались только самые слабые из студентов-математиков его курса.²³ Я ответил: «У вас так, а у нас — иначе». Впрочем, представив меня, он остался до конца лекции о бесконечных системах линейных уравнений и очень внимательно прослушал ее, что произвело на меня приятное впечатление.

Может быть, мои лекции в какой-то мере способствовали появлению интереса к этим проблемам у московских математиков, которые, видимо, недооценивали теоретическую трудность исследования приближенных методов. И действительно, в то время большинство работ состояло из описания предлагаемого алгоритма и экспериментального опыта его применения. Между тем, например, сходимости метода Галёркина для случая одномерного дифференциального уравнения, установленная после предварительной работы академика Г. И. Петрова [52] Мстиславом Всеволодовичем Келдышем в работе 1942 г. [53], считается одним из его ярких достижений. И сейчас остается ряд непростых нерешенных проблем, например, в задаче о конформном отображении — вопрос об области значения параметра, в которой имеет место сходимости приближенного решения.

²²О теплом отношении Л. С. Понтрягина к Леониду Витальевичу в то время свидетельствуют его письма с нежным обращением «Дорогой Лёничка» и присылаемые отписки. Последнее из полученных Леонидом Витальевичем писем от Понтрягина — довольно сухое поздравление со Сталинской премией в 1949 г. С этого времени, а именно тогда началась известная кампания против «безродных космополитов», у Понтрягина все активнее стал проявляться антисемитизм (говорят, что, возможно, это было связано и с его женитьбой). В последние годы, очевидно, Понтрягин испытывал к Леониду Витальевичу и личную неприязнь. Ничем иным нельзя, например, объяснить появление следующего пассажа в его статье в журнале «Коммунист» (1980, № 14): «В последнее время можно встретить, например, так называемые экономико-математические работы, насыщенные сложной математической символикой, но не содержащие ни одного конкретного, численного примера, — непонятные, недоступные и фактически ненужные экономистам, а с точки зрения математиков — представляющие ничтожную ценность, либо вообще не обладающие ею». Направленная против статьи Л. В. Канторовича и С. Л. Соболева «Математика в современной школе» (Математика в школе // 1979, № 4), эта статья по своей теме была никак не связана с экономико-математическим направлением, и только имя одного из авторов, в то время уже Нобелевского лауреата, с которыми ведется полемика, могло инициировать этот текст.

²³Такое отношение к вычислительной математике было широко распространенным и сохранялось еще долгое время. Свидетельство тому, например, выступление А. А. Дороницына на сессии АН по автоматизации: «Не изжито еще старое представление, что численный анализ и вычислительная математика — это черная работа, и способные студенты неохотно идут по этой специальности» (Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации 15–20 октября 1956 г. Пленарные заседания. М.: Изд. АН СССР, 1957, с. 156).

Во время моего пребывания в Болшево в доме отдыха Комиссии содействия ученым я имел много личных контактов с математиками, а А. О. Гельфонд познакомил меня и со многими физиками — И. Е. Таммом, Л. И. Мандельштамом, только что прибывшим в СССР П. Л. Капицей. Побывал я и у Лаврентьевых. В Болшево со мной произошел один неприятный инцидент. Спустившись на лыжах с горы к Клязьме, я провалился в прорубь и наполовину погрузился в воду. Мне помогли выбраться и дойти до дома отдыха, где меня сразу же уложили в постель, и, к зависти остальных, напоили портвейном. Я не хотел беспокоить свою мать и не рассказывал ей об этом эпизоде. Однако оказалось, что из нескольких писем москвичей в Ленинград она очень подробно узнала об этом.²⁴

С удовольствием вспоминаю и другую, более раннюю поездку в Москву. Если не ошибаюсь, в 1933 или в начале 1934 г. в Москве проводилась конференция молодых ученых, на которую из математиков поехали С. Л. Соболев и я, а также физиолог Э. А. Асратян, экономист А. Г. Милейковский, геолог К. К. Марков. Сергей Львович рассказал о серии своих работ по применению функциональных уравнений к задачам сейсмологии. Я прочел небольшой доклад, посвященный обобщению формулы Парсеваля на непрерывный случай — соответствующая заметка печаталась в это время в журнале *Compositio Mathematica* [54]. Если семейство ядер, зависящее от параметра, является полным семейством, то есть нет ортогональных к нему, то справедлива формула, внешне аналогичная формуле Парсеваля — сумма квадратов некоторых интегральных средних совпадает с интегралом квадрата функции. Этот факт интересен не только как обобщение известной формулы, но и по способу доказательства, в котором существенную роль играли вероятностные соображения. На конференции я впервые встретился с Израилем Моисеевичем Гельфондом, который стал аспирантом А. Н. Колмогорова, не закончив университета. Хотя в то время у Гельфонда было опубликовано, кажется, только две небольших заметки в газете, изданной по случаю данной конференции, в том числе его известная лемма о слабый сходимости, беседы с ним были для меня чрезвычайно интересны. В то время в Москве больше знали функциональный анализ, там работал А. И. Плеснер,²⁵ систематически читались лекции, — в Ленинграде мы только

²⁴ Из письма Г. М. Фихтенгольца от 3 марта 1935 г.: «Дорогой Леонид Витальевич, очень обеспокоен сообщением Вл[адимира] Ивановича Смирнова] о Вашем ледяном купании. Матушка Ваша, по-видимому, об этом ничего не знает, ибо — на вопрос о Вашем самочувствии — сообщила, что Вы уже два раза катались на лыжах, значит, чувствуете себя хорошо! Напишите, как себя чувствуете на самом деле».

²⁵ Абрам Иезекиилович Плеснер (1900–1961) учился и работал в Германии, в частности, в Гёттингене. В 1932 г., в связи с угрозой фашизма, эмигрировал и работал в Москве. В обзорной статье «Функциональный анализ» (*Математика в СССР за тридцать лет*. М.; Л., 1948, с. 612–613) М. Г. Крейн и Л. А. Люстерник отмечали «выдающуюся роль А. И. Плеснера в формировании Московской школы функционального анализа». И далее: «В его оригинальных курсах, руководимых им семинарах и диссертациях его учеников вопросы функционального анализа ставились с большой широтой... На этих семинарах и курсах был воспитан большой коллектив молодых математиков; из них И. М. Гельфонд стал вскоре центром кристаллизации новых оригинальных направлений функционального анализа».

начали его изучение. Наши беседы с И. М. Гельфандом касались не только этого предмета, но и многих других. Меня поразило его совершенно иное понимание, как бы с другой стороны, некоторых вопросов, которые я хорошо знал и которыми даже занимался, например, аппроксимация функций. Впечатление было такое, что я вместе с теми руководствами, которые изучал, смотрел на предмет снаружи, а Гельфанд рассказывал, что там внутри. Мои связи с ним, иногда более интенсивные, иногда менее, продолжают до настоящего времени.

Теория полуупорядоченных пространств

Двадцатые – начало тридцатых годов ознаменовались быстрым развитием новой отрасли математического анализа — функционального анализа. После классических работ Д. Гильберта последовали фундаментальные исследования Ф. Рисса (1918), С. Банаха (1922–1923). Было ясно, что эта область приобретает все большую популярность. Конечно, были и скептики, недооценивавшие ее значение, считавшие, что это просто пересказ на другом, более общем языке известных фактов математического анализа.

Большое значение имело появление в 1927 г. книги Дж. фон Неймана «Математические основы квантовой механики»,²⁶ в которой функциональный анализ (гильбертовы пространства и пр.) был с успехом применен для математического оформления новых сложных физических теорий, появившихся незадолго до этого, идей П. Дирака и др. П. Дирак уже в 1933 г. получил Нобелевскую премию за свои работы по квантовой механике.

Мы в Ленинграде мало знали о работах по функциональному анализу. В. И. Смирнов, обладавший исключительной эрудицией и быстрой ориентировкой в новых областях, первым оценил значение этого направления. Читая лекции у физиков, он, в отличие от многих других математиков, был и в курсе новейших работ по теоретической физике.

В 1933 г. в университете был объявлен большой научный семинар по функциональному анализу, в котором приняли участие не только работавшие в области теории функций, но и другие активные математики Ленинграда того времени. Помнится, что на первом заседании были Н. М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин, С. Г. Михлин. Наряду с титулованными (А. А. Марков (мл.), В. А. Тартаковский, С. А. Янчевский) в семинаре принял участие и ряд молодых математиков, аспирантов и студентов (Б. З. Вулих, М. К. Гавурин, С. М. Лозинский). Небезынтересно взглянуть на фотографию одного из первых заседаний семинара.²⁷

Работа семинара сначала носила чисто учебный характер — ряд вводных лекций прочел В. И. Смирнов, несколько докладов было сделано мной. Систематически изучалась книга С. Банаха «Теория линейных операций», докладывались отдельные крупные мемуары. Несколько заседаний было

²⁶ Книга была опубликована в 1932 г., но главные результаты появились в статьях Дж. фон Неймана в 1927. — Прим. С. С. Кутателадзе.

²⁷ Эта фотография публиковалась в том же томе.

посвящено теории Фантаппиа.²⁸ Для функционального анализа была характерна чрезвычайная разбросанность и широта — эта наука возникла из разнообразных задач — теории функций, математической физики, теории вероятностей и др. Естественно, что некоторые работы носили случайный характер и не получили дальнейшего развития.

Почти сразу начались и некоторые самостоятельные работы участников семинара, примыкавшие к известным направлениям. Так, проф. Г. М. Фихтенгольцем и мной была дана теорема об общей форме линейного функционала в пространстве всех измеримых ограниченных функций, где использовался интеграл Радона. Попутно была решена непосредственно относящаяся к функциональному анализу проблема мощности множества функционалов в этом пространстве, оказавшейся равной $2^{2^{\aleph_0}}$. Работа содержала и ряд других предложений, например, о слабой сходимости в этом пространстве. Она была отправлена в *Studia Mathematica* и опубликована в пятом томе за 1935 г. и в ДАН [55, 56]. Впрочем, некоторые пункты этой работы варшавским специалистам были уже известны. На работу появился отклик Феликса Хаусдорфа, который вместо нашего довольно громоздкого трансфинитного построения в доказательстве теоремы о мощности множества функционалов предложил для леммы, на которую оно опиралось, гораздо более короткое доказательство всего в полторы страницы.

Следующая моя работа была посвящена проблеме распространения функционалов как характеристике пространства Гильберта [57]. Именно, в ней устанавливается некоторый класс функциональных пространств, в которых, подобно Гильбертовым, можно распространять все функционалы с подпространства на всё пространство с сохранением аддитивности. Как было отмечено в рецензии в *Zentralblatt*, таких пространств, кроме Гильбертова, нет. Однако эту теорему можно обернуть и рассматривать таким образом, что тем самым установлено еще одно свойство, выделяющее пространство Гильберта из класса всех нормированных пространств, как это делает С. С. Кутателадзе [58].

К функциональному анализу примыкали и вопросы, связанные с теорией обобщенных функций, развитые у нас С. Л. Соболевым, а позднее — школами Л. Шварца, И. М. Гельфанда. Я уже отмечал свой интерес к этой проблематике, которая мне казалась важной и в анализе и в функциональном анализе, и сделал несколько работ в этом направлении. Мной были намечены некоторые отличные от названных подходы к этой проблеме и пути дальнейшей работы. В 1935 г. были опубликованы две заметки [59, 60] о методах расширения пространств Гильберта, общих и частных. Третья заметка, в которой я хотел это связать с приложениями к анализу, не была завершена и не опубликована. До настоящего времени я не знаю, насколько этот путь был реален и плодотворен.²⁹

²⁸ Теорией Фантаппиа занимался С. А. Янчевский. См., например, сообщение о его докладе в УМН, 1938, вып. 5, с. 258.

²⁹ Об этих работах пишет И. М. Гельфанд «...По существу, Леонид Витальевич первым понял значение обобщенных функций и написал об этом задолго до Лорана Шварца. И, я думаю, не случайно, что не его работа оказалась широко известной. Для концепции

Дело в том, что как раз в это время меня привлекла другая тема, новый круг проблем. В какой-то мере в выборе тем играют роль и внешние обстоятельства. За несколько лет до этого Г. М. Фихтенгольц, И. П. Натансон и я наметили разработку ленинградского курса теории функций вещественной переменной. Я был отстающим, на мне лежало изложение дескриптивной теории. Начав эту работу в Теберде, в одном из популярных курортов Комиссии содействия ученым, я долго размышлял о том, как же ввести дескрипцию. Вводить ее как обычно для вещественных функций было в какой-то мере уже старомодно, а как это сделать с более общих позиций функционального анализа, было непонятно. Уже и из рассказа о моих работах видно, какую роль в дескриптивной теории играет упорядочение — оно отсутствовало в известных функциональных пространствах.

Тогда и возникла идея обогащения аппарата функционального анализа — введения пространств, в которых определено отношение порядка. Мне показалось даже странным, что это очень существенное свойство большинства математических объектов до тех пор не получило отражения в функциональном анализе. Были построены полуупорядоченные пространства, в которых для некоторого достаточно богатого набора их элементов определено отношение порядка с известными свойствами.

Уже в Докладах АН за 1935 г. была опубликована моя заметка о линейных полуупорядоченных пространствах [61]. Я даже думал о включении дополнительного сообщения на предстоящей в сентябре топологической конференции в Москве, но, видимо, от купания в холодных горных озерах Теберды я довольно тяжело заболел.³⁰ Хотя я и попал на саму конференцию,³¹ но был не в силах подготовить выступление на соответствующем уровне. Несмотря на то, что я не был вполне здоров, эта тема меня настолько увлекла, что в 1935–1936 гг. появилась целая серия моих заметок в ДАН и *Comptes Rendus*, посвященная этой новой теории. Мною было сделано и несколько докладов на семинаре по функциональному анализу.

Первая аксиоматика полуупорядоченных пространств выглядела очень громоздкой. Кажется, в ноябре 1935 г., когда удалось построить довольно

Леонида Витальевича это был только маленький фрагмент. То, что было всей жизнью или основой творчества для других, было маленьким фрагментом выстраивающейся у него картины математики и её связей с миром. Я думаю, что сделанная намного позже работа А. Г. Костюченко и моя об использовании обобщенных функций для спектрального анализа операторов была именно той, которую Леонид Витальевич не написал в свое время. По существу же он четко и ясно понимал эту работу, какие теоремы можно получить». (Работа Л. Шварца была отмечена Золотой медалью и премией Дж. Филдса в 1950 г.)

³⁰Леонид Витальевич рассказывал, что тогда он долго болел, причем ему был поставлен диагноз «кишечный туберкулез», в то время неизлечимая болезнь. Несмотря на это, он работал исключительно интенсивно, надеясь успеть как можно дальше продвинуть свои исследования. Он рассказал об этом во время своей последней болезни, убеждая нас сообщить ему истинный диагноз, а узнав его, вёл себя исключительно мужественно, много работал, был неизменно доброжелателен.

³¹Первая международная топологическая конференция проходила в Москве 4–10 сентября 1935 г. В ней, помимо советских, участвовали практически все ведущие математики мира: Дж. Александер, Г. Биркгоф, А. Вейль, С. Лефшец, Дж. фон Нейман, М. Стоун, Х. Фрейденталь, Х. Хопф и многие другие. См. УМН, 1936, вып. 1, с. 260–262.

простую и красивую аксиоматику [62], я выступил с докладом в Московском математическом обществе. Андрей Николаевич Колмогоров рассказывал мне о своих впечатлениях о докладе — сначала те примеры, которые рассматривались, не показались ему интересными, но когда ему самому пришла в голову мысль, что как полуупорядоченное может рассматриваться пространство функций ограниченной вариации, считая положительной монотонно возрастающую функцию, он понял разнообразие этих объектов. Этот пример он, естественно, обнаружил еще до того, как я дошел до него в своем изложении.³²

Теория полуупорядоченных пространств мне представлялась целым направлением в функциональном анализе, новым и перспективным. Я сам занимался ею в последующие годы и привлек к этой работе своих учеников — Б. З. Вулиха, А. Г. Пинскера и др. Выяснилось, что эта проблематика стала интенсивно разрабатываться и на Западе, где этих вопросов касались работы Гаррета Биркгофа, Х. Фрейденделя, Дж. фон Неймана.³³ В Советском Союзе близкую к этому теорию пространств с конусами положительных элементов несколько позже развил М. Г. Крейн и его школа. Однако класс линейных полуупорядоченных пространств был, по-видимому, впервые введен мною. В какой-то мере к этому подошел Ф. Рисе в своем докладе на Болонском конгрессе [63], но, по существу, общей теории таких пространств у него не было. Изучались пространства функционалов с такими свойствами. В вышедшей в 1940 г. книге Г. Биркгофа «Теория структур» теория полуупорядоченных пространств связывается с моим именем и ей посвящена отдельная глава [64].

Мной был подготовлен ряд мемуаров, частично вышедших позднее, и уже в 1936 г. я имел возможность читать специальный курс «Функциональный анализ на основе теории полуупорядоченных пространств». Одними из первых слушателей были мои будущие соавторы Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, а также М. К. Гавурин, Н. А. Шанин и др. Часть результатов была изложена в мемуарах, часть только анонсирована в заметках, но было совершенно ясно, что эта новая точка зрения, определяемая включением упорядочения в исследование объектов функционального анализа, значительно их обогащает и разнообразит. Даже некоторые факты теории функций вещественной переменной тут выглядели по-новому, например, теорема Фреше, теорема Витали. Получались новые теоремы — не знаю, была ли ранее доказана такая теорема, что всякое множество ограниченных измеримых функций имеет точную верхнюю грань, то есть существует функция, которая превосходит каждую из этого множества во всех точках (кроме, может быть, множества точек меры нуль) и притом наименьшая из таких функций.

Одним из направлений, которое привлекло мое внимание, было аналитическое представление линейных операций, преобразующих одно пространство в другое. В данном случае выделялось три класса таких операций

³² В письме, направленном в 1938 г. Л. В. Канторовичу Д. А. Васильковым, бывшим в то время аспирантом НИИМ МГУ, есть сообщение о том, что А. Н. Колмогоров вел в 1936 г. в МГУ семинар по теории полуупорядоченных пространств.

³³ См. переписку с этими математиками.

ввиду наличия двух видов сходимости в каждом полуупорядоченном пространстве — o -сходимости и t -сходимости. Значительная часть этих работ была выполнена мной совместно с Б. З. Вулихом [65, 66]. Как известно, вопросы представления операций в банаховых пространствах были предметом первых работ И. М. Гельфанда [67], в которых он предложил свежие подходы и получил ряд тонких результатов. Мы с ним имели определенные контакты по этим вопросам, и наши разработки частично взаимопересекались. Глубокая теорема о расширении пространств, связанная с понятием дизъюнктивности элементов, была получена А. Г. Пинскером [68]. Частично эта работа, хотя и в другой терминологии, смыкается с работами японских математиков, а также исследованиями группы М. Г. Крейна.

Представляют также интерес исследования функциональных уравнений в полуупорядоченных пространствах. Дело в том, что принцип сравнения, принцип мажорант, широко применяющийся в классическом анализе, не получил до того времени отражения в функциональном анализе. На языке полуупорядоченных пространств удалось достаточно содержательно и естественно сформулировать принцип мажорант, некоторые общие теоремы о мажорации. При этом потребовалось пойти еще на одно обобщение — наряду с обычными нормированными пространствами ввести в рассмотрение пространство, нормированные элементами полуупорядоченных пространств (например, для банаховых пространств — пространства B_K). Так как элементы полуупорядоченного пространства во многом очень близки к понятию числа по своим свойствам, они, так же как вещественные числа, могут использоваться в качестве нормы. Это дало общий и удобный принцип мажорации, который, в частности, я применил в некоторых задачах по численным методам, о которых говорилось выше, например, в теории бесконечных систем линейных уравнений и др. Здесь был источник получения новых результатов, относящихся к сходимости, оценкам приближенного решения и его характеристикам, получаемым с помощью мажорирующего уравнения. Эта работа была опубликована у нас [69], а также по предложению Т. Карлемана, приезжавшего в 1938 г. в СССР,³⁴ направлена в *Acta Mathematica* и опубликована там в 1939 г. [70], так что она оказалась довольно известной.

Мой курс, правда не очень хорошо оформленный (у меня была идея издания монографии по этим вопросам, но тогда мне не удалось ее осуществить), был представлен в виде рукописи на проходивший как раз в это время в Ленинграде (1937) конкурс работ молодых ученых, и ему была присуждена общая (по всем специальностям) первая премия.³⁵ Годом позже проводился такой же Всесоюзный конкурс, и эта работа получила

³⁴Вероятно, Карлеман приезжал в СССР в 1937 году (о его докладе в сентябре 1937 см. УМН, 1938, вып. 5, с. 258).

³⁵Общегородской конкурс был этапом Всесоюзного конкурса, проводившегося ЦК ВЛКСМ и АН СССР по инициативе Ботанического института АН (в это время никаких научных премий в СССР не существовало: премии им. Ленина были ликвидированы в 1935 г., а Сталинские учреждены в 1940 г.). В соответствии с положением о конкурсе в нем могли участвовать лица, окончившие советские вузы не позднее 1928 г.

первую премию по математике наряду с работами С. Л. Соболева, А. Д. Александрова, Л. С. Понтрягина. В 1938 г. в зале Ленинградской филармонии состоялось торжественное заседание по итогам конкурса, где академик Л. А. Орбели вручил мне диплом и я сделал краткий доклад.³⁶

Линейное программирование

Многих удивляет, как это вдруг случилось, что я стал экономистом. Нужно сказать, что некоторый интерес к экономике, к экономическим решениям у меня всегда был. Например, я с большим интересом слушал лекции по политэкономии, которые нам читал на третьем курсе А. А. Вознесенский, в последующем ректор университета, брат известного экономиста, председателя Госплана, члена Политбюро Н. А. Вознесенского. Я часто подходил к нему после лекций с вопросами. Марксова теория капиталистического хозяйства, в особенности в части, относящейся к третьему тому «Капитала», выглядела научно стройной и содержательной. Экономика социализма как будто нам тогда не читалась.

Мне даже пришлось работать экономистом. После третьего курса — летом 1929 г. — мы должны были пойти на практику. У математиков практика заключалась в том, чтобы считать цифры от одного до десяти — облачность в геофизической обсерватории или на счетах в сберкассе. Я нашел единственное подходящее место — это работа статистиком в Ташкенте, в управлении Средазводхоз (огромное управление, которое занималось проектированием и строительством систем орошения по всей Средней Азии). Должности статистика не оказалось, и я был зачислен на должность младшего экономиста. Небезынтересно, что моим руководителем оказалась Мария Спиридонова,³⁷ работавшая там, находясь в ссылке.

Половину времени я занимался изучением экономических материалов, описанием условий орошения, использования водных ресурсов и их распределения. Я работал по Чу-Таласской водной системе, которая проходила через две республики — Киргизию и Узбекистан. Другая половина времени мне давалась для собственных занятий — я писал некоторые параграфы

³⁶ 15 апреля 1938 г. «Ленинградская правда» печатает портрет Л. В. Канторовича и небольшую заметку «Работы молодых ученых» о прошедшем конкурсе: «Прекрасную оценку получила работа 25-летнего ленинградского профессора математики Л. В. Канторовича — «Функциональный анализ на основе теории полуупорядоченных пространств». Отличные оценки получили труды молодых ученых — Э. А. Асратяна — «Кора большого мозга и пластичность нервной системы» и Б. С. Мейлаха — «Пушкин и русский романтизм...» (Асратян и Мейлах также получили первую премию). Как участники собрания в Филармонии в заметке названы академики С. И. Вавилов и А. А. Байков, а Л. А. Орбели не упомянут.

³⁷ М. А. Спиридонова (1884-1941) была знаменитой террористкой, а в период октябрьского переворота — лидером партии левых эсеров. Эта партия, тогда тесно сотрудничавшая с большевиками и единственная, кроме большевиков, входившая в первое правительство, была вскоре после революции запрещена, а её члены арестованы и репрессированы. Встретить Спиридонову в 1929 г. было для молодого Леонида Витальевича в высшей степени удивительно. — Прим. С. С. Кутателадзе.

из нашего с Ливенсоном мемуара об аналитических и проективных множествах, которые были потом частично использованы.

Однако это было скорее эпизодом. Как я говорил, на выбор тем для научных занятий, наряду с внутренними интересами и математическими устремлениями, определенное влияние оказывали и внешние факторы, общая обстановка. В 1936–1937 гг., когда я заканчивал свои работы по полупорядоченным пространствам, я почувствовал некоторую неудовлетворенность математикой. Не то чтобы работа была неинтересной или безуспешной, но мир находился под страшной угрозой коричневой чумы — немецкого фашизма. Было ясно, что через несколько лет наступит тяжелейшая война, угрожающая цивилизации. И я почувствовал ответственность, понимая, что незаурядные люди должны что-то сделать.

Конечно, мои работы по чистой и прикладной математике находили использование, в том числе и в спецтематике.³⁸ В то же время у меня было ясное ощущение, что слабым местом, снижающим нашу индустриальную и экономическую мощь, было состояние экономических решений. Это была не только моя оценка. В основном докладе Г. М. Маленкова на XVIII партконференции,³⁹ посвященной вопросам совершенствования управления на предприятиях, говорилось, что только от одного устранения явления штурмовщины⁴⁰ выпуск продукции может возрасти на 20-25%. И это был далеко не единственный недостаток, свидетельствующий о несовершенстве управления экономикой.

В это время как раз была введена новая Конституция, выборы, образован Верховный Совет. Создалась несколько более демократическая обстановка для обсуждения экономических проблем, и я все чаще думал об этих вопросах, скорее, правда, на дилетантском уровне, чем научно, но все же используя общую интуицию. Например, мной была написана в Верховный Совет записка о нелепом положении с книжной торговлей, системой тиражей и цен, которая приводила к неоправданному книжному дефициту, спекуляции, большим потерям государства и населения.⁴¹

Перед XVIII партсъездом⁴² состоялась открытая дискуссия, подобно тому, как сейчас перед XXVII, можно было писать предложения, замечания, и я тоже направил статью о крайнем искажении системы цен из-за того, что в них не отражается фондоемкость, и об ущербе, который из-за этого происходит. Напечатана она не была, но мне был прислан ответ из Бюро цен Госплана, что они рассмотрели статью, но-де мои предложения не учитывают существующего порядка определения цен и политику цен. Одним словом, была послана отписка.⁴³

³⁸ Секретные научно-технические темы, связанные с военными приложениями.— Прим. С. С. Кутателадзе.

³⁹ 1941 г., февраль.

⁴⁰ Крайняя неравномерность работы предприятия, когда почти всё задание, запланированное на период (месяц, квартал, год), выполняется в конце его.

⁴¹ Эта записка сохранилась.

⁴² 1939 г., март.

⁴³ Ответ «Правды» (13 марта 1939 г.): «Ваше письмо напечатать в «Дискуссионном листке» не представилось возможным, и потому мы переслали его в Госплан СССР,

Однако непосредственным поводом к переходу на занятия экономикой послужил в какой-то мере даже случайный факт. Будучи профессором университета, я также заведовал отделом математики в Институте математики и механики ЛГУ (директором был В. И. Смирнов) и выполнял в связи с этим некоторые административные обязанности. Однажды ко мне за консультацией пришло несколько инженеров из лаборатории фанерного треста с довольно грамотно поставленной задачей. При обработке на лущильных станках разного вида материалов получается различная производительность; в связи с этим выход продукции этой группы станков зависел от такого, казалось бы, случайного факта, какая группа сырья на какой лущильный станок была направлена. Как это обстоятельство рационально использовать?

Меня эта задача заинтересовала, но все-таки показалась довольно частной, элементарной, так что я не стал, бросив всё, ею заниматься. Я поставил эту задачу на обсуждение на заседании отдела математики, где были такие крупные специалисты, как Н. М. Гюнтер, сам В. И. Смирнов, Р. О. Кузьмин, В. А. Тартаковский. Все послушали, но никто не предложил решения; к кому-то они уже обращались раньше в индивидуальном порядке, как будто к Р. О. Кузьмину. Однако эта задача все-таки висела надо мной. Это был год моей женитьбы, так что я был отвлечен и этим. Летом или после отпуска мне стали приходиться в голову конкретные, в какой-то мере похожие экономические, инженерные и хозяйственные ситуации, где тоже требовалось решение задачи максимизации при наличии ряда линейных ограничений.

В простейшем случае одного-двух переменных такие задачи решаются запросто — перебрать всевозможные крайние точки и выбрать наилучшую. Но уже, скажем, в задаче фанерного треста при пяти станках и восьми видах материала такой перебор потребовал бы решения примерно миллиарда систем линейных уравнений, и было очевидно, что это нереальный путь. Я строил частные приемы решения отдельных видов таких задач, геометрические приемы и, вероятно, впервые докладывал об этой задаче в 1938 г. на Октябрьской научной сессии Герценовского института,⁴⁴ причем в основном это была постановка ряда задач и некоторые соображения по их решению.⁴⁵

бюро цен для сведения».

⁴⁴ Ленинградский педагогический институт им. Герцена.

⁴⁵ В архиве Леонида Витальевича сохранилась относящаяся к 1938 г. рукопись «О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта», которая по содержанию, вероятно, соответствует упомянутому докладу. Эта рукопись, за исключением двух страниц, которые были обнаружены позднее, напечатана в сборнике научных трудов Воронежского университета, посвященном памяти Л. В. Канторовича (Экономико-математические модели и методы. Воронеж, 1989, с. 13–18). По существу, в этой работе описывается симплекс-метод. То, что работа не была тогда же опубликована, связано с очевидной неэффективностью симплекс-метода при счете вручную для сколько-нибудь реальных задач (а ведь машин тогда не было). Как вспоминает Леонид Витальевич, уже в январе 1939 г. им был предложен метод разрешающих множителей (и с его помощью, например, в 1949 г. решались вручную задачи рационального раскрытия с сотнями ограничений). Любопытно, что симплекс-метод пока-

Универсальность этого класса задач, сопряженная с их трудностью, заставила меня заняться этим всерьез, включить свои математические знания, в частности, некоторые соображения из области функционального анализа.

Речь идет о классе задач на экстремум, в которых точка экстремума лежит на границе рассматриваемой области. Такие задачи характерны для экономики. Некоторый экономический процесс характеризуется двумя векторами: $x \in X$ — результаты процесса и $y \in Y$ — используемые ресурсы, X и Y — некоторые линейные пространства.

Рассматривается множество реализуемых процессов T . Каждому значению параметра $t \in T$ отвечает некоторый процесс, характеризуемый его затратами и результатом (x_t, y_t) . Множество $\{(x_t, y_t) : t \in T\}$ предполагается выпуклым, то есть вместе с каждой парой процессов в него входит и их усреднение. Точка (x_0, y_0) называется экстремальным состоянием процесса, если пересечение конуса положительных элементов с вершиной в этой точке с множеством $\{(x_t, y_t) : t \in T\}$ пусто. Экономически это означает, что не существует варианта процесса, в котором бы и результаты x были больше x_0 , и затраты y меньше y_0 .

Каждому экстремальному состоянию отвечает некоторый линейный функционал, достигающий экстремума в этой точке — опорная плоскость, отделяющая эту точку от внутренних. Если написать какое-либо нормированное уравнение этой гиперплоскости, то каждой координате (x, y) будет отвечать некоторое число (ξ, η) , причем $\xi x + \eta y = 0$.

Таким образом, каждой экстремальной точке (x_0, y_0) отвечает двойственная ей система чисел (ξ_0, η_0) , которые можно назвать оценками отдельных координат в пространствах X и Y . Этими оценками крайние точки (или экстремальные состояния) вполне характеризуются — каждому виду конечных результатов и каждому виду затрат ресурсов соответствует своя оценка. Наличие для данного варианта процесса такой системы оценок является свидетельством его экстремальности, неулучшаемости в данных условиях, то есть при данных ресурсах и заданных конечных результатах. Отсюда вытекает также алгоритм нахождения экстремального состояния процесса — если мы имеем некоторый вариант, пытаемся для него определить эти оценки и их не обнаруживается, то естественно указать путь, направление сдвига к внутренним точкам, дающее в каком-то смысле градиентное направление перехода к лучшему состоянию и, таким образом, последовательными улучшениями перейти к нужному решению.

Я описал общую задачу. Отметим два важных частных случая, когда отображение $t \rightarrow (x_t, y_t)$ линейно. Если требуется найти экстремальное состояние при данных ресурсах и заданном ассортименте конечной продукции, то есть требуется определить на луче, исходящем из поверхности дан-

зался сначала и Дж. Данцигу слишком трудоёмким даже при машинном счёте, и только испытания на тестовых примерах убедили его в обратном. Об этом, например, пишет С. Брентъес в статье «К истории линейного программирования» (см.: *Л. Канторович, В. Лассманн, Х. Шилар, К. Шварц, С. Брентъес. Экономика и оптимизация*. М.: Наука, 1990, с. 244).

ных ресурсов, крайнюю точку — то это так называемая основная производственная задача. Если при данном конечном задании требуется получить результат с наименьшей затратой ресурсов, в векторной форме или в виде их линейной комбинации — то это основная задача линейного программирования.

Насколько мне помнится, в январе 1939 г. мною был создан метод разрешающих множителей, в котором решение самой системы в каком-то смысле заменялось, объединялось с задачей нахождения некоторых множителей, соответствующих каждому виду продукции, что гарантировало оптимум найденного решения и давало эффективный путь для решения исходной задачи. Созданный метод отличался тесным объединением процессов решения прямой и двойственной задач, он был похож на алгоритм для одно-временного решения прямой и двойственной задач, разработанный много позднее Данцигом, Фордом и Фулкерсоном [74].

Стала ясной и разрешимость этих задач и большое их распространение, поэтому на обсуждение моего доклада в университете были приглашены представители промышленности.⁴⁶ Этот доклад составил основное содержание брошюры «Математические методы организации и планирования производства» [72]. Аналогичный доклад, относящийся специально к строительному производству, я сделал в Строительном институте. Университетом в срочном порядке была выпущена моя брошюра, которая была разослана пятидесяти наркоматам.⁴⁷ Она была распространена только в Союзе, так как вышла уже в последние дни перед началом Второй мировой войны и тиражом всего тысяча экземпляров.

Число откликов было невелико. Был довольно содержательный отзыв из Наркомата путей сообщения, в котором рассматривались некоторые оптимизационные задачи, направленные на уменьшение пробега вагонов, и была хорошая рецензия на брошюру в журнале «Лесная промышленность», написанная профессором Гутерманом, тестем М. И. Вишика, благодаря которому, видимо, Гутерман и обратил внимание на нее.

В начале 1940 г. я опубликовал чисто математическую версию этой работы в Докладах АН [73], выраженную в терминах функционального анализа

⁴⁶ Сохранилась стенограмма этого доклада и его обсуждения 13 мая 1939 г. Хотя в стенограмме и не указаны фамилии участников, известно, что вёл заседание В. И. Смирнов (см. об этом в статье Л. В. Канторовича и М. К. Гавурина «Математика и экономика — взаимопроникновение наук» в Вестнике ЛГУ, 1977, № 13). По текстам выступлений можно установить участие в дискуссии Н. М. Гюнтера и Г. М. Фихтенгольца. Остальные выступавшие — это, вероятно, приглашённые инженеры и работники промышленности. Леонид Витальевич ожидал (об этом он неоднократно говорит в процессе обсуждения) от практических работников постановки конкретных производственных задач, которые можно было бы решать предлагаемыми им методами, считая, что придуманные им, теоретиком, примеры таких задач оторваны от жизни. Никаких новых постановок на этом собрании предложено не было. Самое же удивительное, о чём чуть ниже пишет Леонид Витальевич, ссылаясь на книгу Дж. Данцига, что придуманные им примеры охватывали «почти весь круг применений линейного программирования, который был известен в США к 1960 г.».

⁴⁷ Резолюция собрания 13 мая 1939 г. и список, по которому была сделана рассылка брошюры, сохранились и опубликованы.

и алгебраических. Однако не сделал в ней даже ссылки на свою вышедшую брошюру — учитывая обстановку, я не хотел, чтобы та моя практическая работа была использована вне страны.

Той же весной 1939 г. я сделал еще несколько докладов — в Политехническом институте и в Доме ученых, но несколько раз встречался с возражениями, что работа использует математические методы, а на Западе математическая школа в экономике — это антимарксистская школа, и математика — средство апологетики капитализма. Это вынудило меня при написании брошюры максимально избегать термина «экономическое», а говорить об организации и планировании производства; роль и смысл разрешающих множителей пришлось дать где-то на окраине второго приложения и полуэзоповским языком.

В моей книге 1939 г. был описан широкий круг задач — размещение производства, распределение работ, рациональный раскрой, некоторые транспортные задачи и т. д., то есть практически весь круг задач линейного программирования на низовом уровне. Дж. Данциг в своей книге «Линейное программирование, его обобщения и применения» [74] отмечает, что мною был описан почти весь круг применений линейного программирования, который был известен в США к 1960 г. Такое ограничение задачами низового уровня было отчасти связано с теми небезопасными возражениями, о которых я уже говорил.

Одновременно, развивая модели и осмысливая их в более крупномасштабных задачах планирования, я стал ясно понимать значение этих моделей для разработки принципов ценообразования, оценки эффективности, во всяком случае, эффективности капиталовложений, то есть в основных чертах создавалась теория линейной экономики социалистического хозяйства, выраженная математическим языком.

В какой-то мере были задеты и задачи нелинейного программирования, но мое внимание было сосредоточено на раскрытии понятий и количественных соотношений основных характеристик социалистической экономики, хотя были видны и возможности применения разработанного аппарата и к некоторым математическим проблемам, например, аппроксимации функций, но я считал, что сейчас это имеет второстепенное значение.

В это время мною был написан ряд остающихся неизданными статей и рукописей на эту тему. Об этом круге прикладных вопросов я докладывал в Москве, в Математическом институте, и доклад вызвал большой интерес. В частности, при решении вопроса о создании ЛОМИ (ленинградского отделения института) наличие этого комплекса прикладных задач сыграло определенную роль — ЛОМИ было открыто в марте 1940 г.⁴⁸

⁴⁸ В протоколе совещания представителей математических институтов АН СССР и АН УССР от 26–27 октября 1939 г., посвященного организации ЛОМИ, так формулируется тематика работ будущего института: «Институт, организованный в Ленинграде, мог бы поставить исследования по ряду важных и интересных проблем чистой и прикладной математики, которые определяются следующими основными направлениями: 1) алгоритмические проблемы операторной алгебры и комбинаторной топологии, 2) функциональный анализ, 3) теория функций, 4) дифференциальные уравнения, 5) теория вероятностей

Первой из работ в этой области, выполненной в ЛОМИ, была совместная работа по транспортной задаче с недавно защитившим кандидатскую диссертацию М. К. Гавуриным. Эта задача у нас возникла сама собой, но вскоре мы узнали, что задачей планирования перевозок на железнодорожном транспорте, применительно к вопросам перегона порожняка и перевозкам тяжелых грузов, железнодорожники уже занимались. На эту тему имелась брошюра А. Н. Толстого [75], и были некоторые попытки внедрения этой работы со стороны соответствующего отдела Наркомата путей сообщения. Однако ни математической формулировки этой задачи, ни эффективного метода ее решения не было (в 1941 г. Хичкоком было дано математическое описание задачи, но без ее анализа и указания метода решения).

В работе с М. К. Гавуриным [76] были в развернутой форме даны эффективные методы решения задачи (это был некоторый вариант метода разрешающих множителей, но специальный — метод потенциалов), критерий оптимальности решения, поставлены некоторые более общие задачи, в то время не решаемые при имевшихся вычислительных средствах. Был раскрыт экономический смысл этих параметров как территориальных цен для данного груза, была рассмотрена и задача рационального размещения производства. В печатном виде это было сильно сокращено по сравнению с рукописным вариантом, который, к сожалению, утерян. Эта работа в январе 1941 г. была доложена на математической секции Ленинградского Дома ученых.⁴⁹

Публикация этой работы встретила большие затруднения. Она была сдана в печать еще в 1940 г. в журнал «Железнодорожный транспорт», но из-за упомянутой математикобоязни ни в нем, ни в журнале «Известия Транспортной академии», ни в каком-либо другом журнале она тогда напечатана не была,⁵⁰ несмотря на поддержку академиков А. Н. Колмогорова и В. Н.

и математическая статистика, 6) приближённые и экспериментальные методы решения проблем анализа, 7) математические проблемы современной физики, 8) математические проблемы, возникающие в промышленности, в частности, математические методы в вопросах организации и планирования производства». Три из этих восьми направлений (второе, шестое и восьмое) имеют непосредственное отношение к Леониду Витальевичу. В том же протоколе: «Работу, связанную с проведением настоящего постановления в жизнь, поручить комиссии в составе: академика А. Н. Колмогорова, академика С. Н. Бернштейна, академика С. Л. Соболева, академика Н. И. Мусхелишвили, профессора Л. В. Канторовича, академика Б. Г. Галёркина».

⁴⁹ В 1940-41 гг. Леонид Витальевич возглавлял математическую секцию ленинградского Дома учёных.

⁵⁰ В архиве Леонида Витальевича сохранилась переписка, связанная с публикацией этой работы. Письмом от 3 декабря 1940 редакция «Железнодорожного транспорта» потребовала сократить статью почти в десять раз (на 50–60 страниц). Начиная с 1941 г. статья находилась в редакции «Известий АН. Отделение технических наук», по требованию которой несколько раз переделывалась, но в конце концов была отвергнута <, в связи с пересмотром редакционного портфеля и недостатком места в журнале» (письмо от 8 апреля 1945 г.). Затем статья была передана в Труды Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта; письмо от 11 апреля 1946 г. извещает о «невозможности ее помещения в Сборнике Института». 5 мая 1948 г. Леонид Витальевич докладывал эту работу на совместном семинаре Института горного дела и Транспортной секции АН (академики Л. Д. Шевяков, А. М. Терпигорев, В. Н. Образцов и др.), который рекомендовал работу к публикации, хотя, как указано в протоколе, академик Шевяков

Образцова, транспортного генерала.⁵¹ К счастью, я сделал абстрактный вариант этой задачи — заметку о перемещении масс в компактном метрическом пространстве [77], в которой был и критерий и метод потенциалов. В конце приводились две задачи — задача о железнодорожных перевозках (со ссылкой на находящуюся в печати нашу статью с М. К. Гавуриным) и задача о выравнивании площади аэродрома, которая тоже носит прикладной характер. Эта работа, опубликованная в 1942 г. на русском и английском языках,⁵² по-видимому, была первой, из которой специалисты на Западе узнали о моих работах по линейному программированию, но это произошло только в начале 50-х годов.⁵³

Примерно такая же судьба постигла и мою работу о трехмерном рациональном раскрое древесины на пиловочник наиболее высокой ценности [78]. Она пролежала в редакции журнала «Лесная промышленность» до 1949 г. и только тогда вышла в свет, — это был год, когда я, правда за другие работы, получил Сталинскую премию.

Примерно к лету сорокового года относится мое знакомство с Виктором Валентиновичем Новожиловым, одним из наиболее квалифицированных экономистов-статистиков нашей страны, имевшим дореволюционное экономическое образование и хорошую математическую подготовку. Он работал в Политехническом институте и занимался задачей наиболее эффективно использования капиталовложений, рассматривая ее как экстремальную — математически эта задача не очень интересна, потому что это однопараметрический случай и задача решается введением одного разрешающего множителя. Но, во всяком случае, знание экономической теории и практический опыт у него были большие. Вообще, В. В. Новожилов был экономистом широкого профиля и интересовался многими задачами. Наше знакомство состоялось по инициативе Виктора Валентиновича, на которого моя брошюра произвела большое впечатление — использование нескольких разрешающих множителей позволило ему дать более широкие постановки задач, которыми он раньше занимался.

В 1940–1941 гг. нами был проведен совместный семинар в Политехническом институте с участием ряда молодых сотрудников Института, где он и я сделали серию докладов, относящихся к описанию конкретных задач социалистической экономики. Доклады проходили с интересными дискуссиями.

отметил, «что изложение, данное в докладе и в самой работе, трудно доступно для инженера». Теперь в это невозможно поверить — транспортную задачу и метод потенциалов любой студент понимает за несколько минут, да и статья написана исключительно ясно. И только в 1949 г. работа была наконец опубликована.

⁵¹Образцов имел чин «генерала-директора движения I ранга» (в то время советские железные дороги были военизированными).— Прим. С. С. Кутателадзе.

⁵²Леонид Витальевич, видимо, ошибся — работа была опубликована только по-русски.

⁵³Статья «О перемещении масс» была первой из работ Леонида Витальевича по линейному программированию, переведенных в США (Management Science, 1958, V. 5, №1). «Дорогой профессор Канторович. Недавно мне представился случай познакомиться с экземпляром Вашей статьи «О перемещении масс» в Докладах Академии наук СССР за 1942 г. Мне сразу стало ясно, что частью Вы развивали параллельно, но в большей части предвосхитили развитие транспортной теории в США», — так начинается первое письмо Т. Купманса (от 12 ноября 1956), открывшего для Запады работы Канторовича.

Мне помнится, что тогда же состоялась защита докторской диссертации В. В. Новожилова,⁵⁴ — главным оппонентом выступал академик С. Г. Струмилин, который хотя и подверг резкой критике математический подход, но все же оценил высокий уровень исследования и высказался за присуждение степени.

Даже в последние дни перед началом войны были назначены встречи на заводах, посвященные попыткам внедрения отдельных задач. Начало войны, конечно, все изменило.

Я не говорил, что параллельно, разумеется, шла служебная, в том числе и другая научная математическая работа. Был издан мой учебник «Определенные интегралы и ряды Фурье» [79].⁵⁵ Я читал в военном вузе курс теории вероятностей и написал учебник, оригинальный в том смысле, что он был рассчитан на общематематические знания студентов второго курса технического вуза и содержал ряд интересных примеров из военной области [80]. Продолжалась публикация некоторых работ по предыдущим направлениям. Помимо работ по функциональному анализу в этот период были даны новые теоремы о методе Ритца [81] и проведено исследование сходимости вариационных методов и метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям [83, 82]. Отчасти это примыкало к известной работе Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [84]. Эти работы были выполнены в связи с подготовкой второго издания книги о приближенных методах, которая была существовавшим образом переработана и обогащена и вышла уже под названием «Приближенные методы высшего анализа» в первые дни войны [cite]Kry.

В исследованиях сходимости приближенных методов были существенно использованы методы конструктивной теории функций. Позднее, в пятидесятые годы, эти идеи получили развернутое развитие в работах моих учеников И. Ю. Харрик и В. П. Ильина [86, 87, 88].

Делал я и отдельные заметки по экономическим проблемам, но в условиях блокады, военной службы эта работа не могла идти достаточно интенсивно, тем более, что я был привлечен и к спецтематике.⁵⁶

После выезда из Ленинграда в январе 1942 г. в Ярославль, куда было перемещено БИТУ ВМФ, в какой-то мере возобновилась регулярная деятельность — лекции и исследовательская работа. Именно в это время мной была написана большая рукопись «Экономический расчет, обеспечивающий

⁵⁴ В. В. Новожилов защищал диссертацию в марте 1941 г.; об этом эпизоде Леонид Витальевич вспоминал (ошибочно указывая 1940 год) и в своём выступлении на защите диссертации В. Н. Лившица, стенограмма которого приведена в его статье (с. 188).

⁵⁵ Об истории написания этого учебника см. выступление В. А. Залгаллера на заседании Ленинградского математического общества, а также его воспоминания (О встречах с Л. В. Канторовичем // Оптимизация, 1982, вып. 28 (45), с. 58–61).

⁵⁶ В основном это работы, связанные с использованием теории вероятностей для оценки эффективности методов защиты при бомбометании и способов расстановки минных полей. Одна из этих работ впервые опубликована недавно в Новосибирске: Л. В. Канторович. Принципы методики определения целесообразной степени рассредоточения и сравнительной оценки различных мер повышения живучести // Сибирский журнал индустриальной математики, 2001, т. 4, № 2, с. 29–58.

наиболее целесообразное использование ресурсов», название которой я потом несколько изменил.⁵⁷ Этот труд при поддержке академика С. Л. Соболева, бывшего тогда депутатом Верховного Совета РСФСР, был направлен в Госплан и рассмотрен некоторыми его руководителями — В. Н. Старовским, Г. П. Косяченко, тогдашними заместителями председателя Госплана, — но не встретил одобрения. В это же время я докладывал об этой работе в Москве в Институте экономики на семинаре под председательством К. В. Островитянова. В обсуждении участвовал ряд видных экономистов — З. В. Атлас, А. И. Ноткин и др.

Нужно сказать, что обсуждение в Госплане было временами достаточно острым. Один из авторитетных статистиков, проф. Б. С. Ястремский сказал: «Канторович предлагает оптимум, а кто еще предлагал оптимум? Фашист Парето, любимец Муссолини».⁵⁸

Докладывал я эту работу и в Казани, где в эти годы были размещены МИАН и ЛОМИ. В это же время я познакомился и с некоторыми экономистами. Кое-кто решался читать рукопись, но после этого даже сторонился меня при встрече.

Нужно сказать, что инженеры отнеслись к этой работе совершенно иначе.⁵⁹ Так, военное заведение, где я работал, в 1943 г. собиралось выдвинуть ее на Сталинскую премию. Так как оно не было достаточно компетентно в этих вопросах, то предполагалось представить ее через Ленинградский университет. Оно обратилось к проф. Г. М. Фихтенгольцу, который ознакомил с этой работой ректора — А. А. Вознесенского. Ректор прозондировал почву в Москве и затем решительно отверг эту возможность по причине «апологетического характера работ математического направления».

Всё говорило о том, что необходимо на определенное время оставить эти работы. Их продолжение становилось опасным — как я узнал впоследствии,

⁵⁷ Книга была завершена 20 сентября 1942 г. Опубликована в 1959 г. под названием «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов».

⁵⁸ Выступая 5 апреля 1960 г. на заключительном заседании Научного совещания о применении математических методов в экономических исследованиях и планировании и отвечая на нападки консерваторов, Л. В. Канторович сказал: «Товарищ Боярский, исчерпав другие аргументы, пытался меня дискредитировать, сопоставляя мои выводы с цитатами Туган-Барановского. Меня Туган-Барановским не испугаешь! Я помню более серьезный случай, когда в сорок третьем году Ястремский на совещании в Госплане привел такой аргумент: «Вы ставите задачу на оптимум, а вы знаете, кто ставил такую же задачу? Фашист Парето!» Я тогда сказал, что хотя Парето и фашист, но мы не будем добиваться минимума продукции, максимума затрат, минимума доходности только для того, чтобы не было с ним никакого сходства».

⁵⁹ Ряд материалов, сохранившихся в архиве Леонида Витальевича, свидетельствует, что к этим работам во время войны большой интерес проявлял и Ярославский обком ВКП(б). Например, письмо от 20.12.1942 г.: «Уважаемый тов. Канторович! Заводы машиностроительной промышленности области, безусловно, нуждаются в разрешении ряда вопросов организации и планирования производства, которые, насколько нам известно, интересуют и Вас, как научного работника. В ближайшее время нами будет созвано совещание гл. инженеров заводов, на котором будет составлена тематика наиболее актуальных работ...». В июле 1943 г. была организована конференция для металлообрабатывающих заводов Ярославской области, где Леонид Витальевич выступил с докладом «Методика раскрытия материалов в серийном производстве».

мои предположения были небезосновательными. Вариант моей изоляции всерьез обсуждался.⁶⁰ Конечно, это было жестоким ударом для меня, так как я возлагал большие надежды на эти работы. Некоторое время я даже был в состоянии депрессии — стал сомневаться, смогу ли успешно заниматься наукой — эти работы надо было отложить, а в математике я за это время отстал.

Это были уже последние месяцы войны, мы вернулись с военным училищем, в котором я работал, в Ленинград.⁶¹ В Ленинград вернулся и университет, ожидалось возвращение ЛОМИ. В университете я возобновил работу сразу, с ЛОМИ было труднее⁶² — чувства Ивана Матвеевича⁶³ ко мне явно переменялись.

Любопытно, что в середине пятидесятых годов мои работы были вновь посланы в Госплан и другие органы и опять были встречены отрицательно, правда, не столь жестко.

Вычисления, машины, программирование

Еще в 1943 г., будучи в командировке в Москве, я попал, по приглашению Лазаря Ароновича Люстерника, на семинар, где обсуждались проблемы использования машин для больших вычислительных работ. В это время в Москве проводились некоторые такие расчеты. Сначала шла речь о примитивных машинах — счетно-аналитических, которые были приобретены в связи с переписью населения 1939 г. и после этого практически не использовались. По-видимому, впервые эти машины были применены для некоторых

⁶⁰ Как стало известно впоследствии, после обсуждения в Госплане доклада Леонида Витальевича в кабинете председателя Госплана Н. А. Вознесенского состоялось закрытое совещание, где ставился вопрос об аресте Канторовича. Один из участников этого совещания, Ш. Я. Турецкий, уже в шестидесятые годы рассказал о нём А. И. Каценелинбойгену, который и сообщил это Леониду Витальевичу. Как пишет Каценелинбойген, «только благодаря чуду Канторовичу удалось выжить <...>. Руководство Госплана рассматривало любое предложение как личную критику. Помимо бюрократической реакции, самым легким путем зажима критики было обвинить автора врагом, который старается отвлечь персонал от выполнения миссии, возложенной на него партией» (А. Каценелинбойген, Л. В. Канторович: Политическая дилемма в научной деятельности // Экономика и математические методы, 1997, т. 33, вып. 3, с. 38).

⁶¹ В октябре 1944.

⁶² Вновь на работу в Ленинградское отделение МИАН Леонид Витальевич был зачислен с 1 января 1945 г., что, видимо, потребовало немало усилий со стороны А. А. Маркова, возглавлявшего тогда ЛОМИ, — именно Марков сообщил Леониду Витальевичу о его зачислении.

⁶³ Академик Иван Матвеевич Виноградов был более пятидесяти лет директором МИАН. В послевоенное время был известен своим антисемитизмом (возможно, это связано и со ставшим проявляться уже во время войны государственным антисемитизмом, см., например, воспоминания С. Г. Михлина). На первых курсах университета, как вспоминал Леонид Витальевич, он ходил на семинар И. М. Виноградова и даже иногда беседовал с ним после занятий, провожая его домой. Как передавали Леониду Витальевичу, уже в пожилом возрасте Виноградов рассказывал своим молодым ученикам, как блестяще Канторович решал задачи по теории чисел на его семинаре; до войны отношение Виноградова к Л. В. Канторовичу было достаточно теплым. См. об этом также в статье В. М. Тихомирова.

численных расчетов проф. И. Н. Янжулом из Астрономического института в Ленинграде.⁶⁴ На семинаре обсуждались возможности использования этих машин для других расчетов. Они были очень медленными — табулятор делал сложение за полсекунды, умножение — в течение пяти-восьми секунд. Вскользь говорилось о начавшихся разработках по электронным машинам и счетно-аналитическим, построенным на тех же принципах (типа «Марк I», «Марк II» в США). Меня эти вопросы очень заинтересовали, и я тут же на семинаре предложил ряд вариантов их применения.

После возвращения в Ленинград мне была поручена сначала группа в ЛОМИ, а затем и отдел «Приближенных вычислений», который должен был заниматься разработкой численных методов и проводить большие конкретные вычислительные работы по заданию тех или иных организаций (как правило, связанных с физикой).

Нами была установлена связь с ленинградской машинно-счетной фабрикой, занятой простейшими бухгалтерскими вычислениями на машинах, оставшихся там после переписи населения. М. К. Гавурин и я предложили некоторые новые схемы использования этих счетных машин. Основной принцип их эффективного использования — это запараллеливание аналогичных вычислений, благодаря чему появлялась возможность введения простейших программных изменений на коммутационной доске (конечно, вручную).

Так, были предложены способы скорой выборки из таблиц и способ расчета скалярного произведения не умножением, а сложением на табуляторе, при этом один из сомножителей формировался не в десятичной, а в двоичной системе [89].

Серьезным конкретным достижением было вычисление на этой примитивной технике таблиц Бесселевых функций до 120 порядка на большом интервале [90]. Наиболее интересным тут было запараллеливание вычислений⁶⁵ при интегрировании на этих машинах дифференциального уравнения для Бесселевых функций. Запараллеливание достигалось тем, что промежуток интегрирования был разбит на несколько интервалов и функции разных номеров на каждом из интервалов вычислялись одновременно, поэтому получались достаточно большие массивы одинаковых операций, которые эффективно осуществлялись на этих машинах.

Эта работа была сделана при моем участии М. К. Гавуриным и В. Н.

⁶⁴О работах И. Н. Янжула пишет, в частности, Л. А. Люстерник: «Мы остановимся на деятельности Ивана Николаевича Янжула. Он был автором лучшей у нас книги по механизации учета. Не будучи математиком по специальности, он обладал острый интуицией в вопросах вычислений и придумал ряд новых для своего времени и остроумных приемов вычислений на САМ... В январе 1942 г. И. Н. Янжул скончался в Ленинграде во время блокады; в лице этого талантливого человека наша вычислительная математика понесла тяжелую утрату» (Л. А. Люстерник. Экспериментальная счетная станция // УМН, 1946, т. 1, вып. 3/4, с. 202–205).

⁶⁵Леонид Витальевич был одним из пионеров параллелизма. Различные варианты параллельных вычислений и архитектур Он широко использовал и впоследствии в предложенных им компьютерах, например, в конвейерном процессоре для решения задач линейной алгебры, известном под названием «Арифметической машины» (АМ). — Прим. Я. И. Фета.

Фаддеевой. Любопытно, что параллельно таблицы Бесселевых функций рассчитывались в США на машинах «Марк» и даже «ЭНИАК». Наша работа началась двумя годами позже и была выполнена всего за полтора года, еще до того, как было закончено издание американских таблиц.

Мое внимание привлекла и сама вычислительная техника. Возникла идея — важную, часто встречающуюся операцию выборки значений функции из таблиц осуществлять автоматически. Для этого было спроектировано специальное устройство — «функциональный преобразователь» на простейшей электромеханике, полупроводниках — купроксах и селенах, включавшее более 10 тысяч полупроводниковых элементов. По заказу Математического института и заинтересованных организаций это устройство было изготовлено в нескольких экземплярах на заводе счетно-аналитических машин в Москве. Оно позволяло операцию расчета значения функции — выборки основного значения из таблицы и расчета поправки — делать за короткое время. Для каждой функции требовалась своя система коммутации. Впрочем, как я уже говорил, была и доска с универсальной коммутацией, которая одновременно позволяла вычислять десять различных функций, но с меньшей точностью. В дальнейшем «функциональный преобразователь» был зарегистрирован как изобретение [91], некоторое время применялся, но это было уже время перехода на электронную вычислительную технику.⁶⁶ У нас появились первые ЭВМ — «Стрела» и БЭСМ, с которыми наше устройство конкурировать не могло. Но, вероятно, это была первая в мире вычислительная машина, в которой широко использовались полупроводники.

Первые годы электронно-вычислительная техника была малопроизводительна, дорога и доступна только некоторым приоритетным учреждениям. Между тем расчеты велись во многих организациях — научных, проектных, геодезических и других, в которых работали десятки и сотни вычислителей-операторов, и именно ими фактически выполнялись массовые вычисления. Эти операторы работали на счетных машинах механического типа — арифмометрах. Наиболее совершенными из настольных счетных машин были в то время «Мерседес-Эвклид» и «Рейнметалл», которые импортировались из-за границы.

Попытки собственного производства подобных автоматов встретили значительные трудности — нужны были высококачественные материалы и очень точная механическая обработка. Было произведено лишь несколько десятков или сотен таких машин, причем работали они неудовлетворительно. Между тем и зарубежные машины также имели недостатки — были не очень надежны, требовали частого и сложного ремонта, запасных частей, так что каждые пять работающих машин должен был опекать квалифици-

⁶⁶Как следует из имеющегося в архиве документа: «Даты, относящиеся к разработке «функционального преобразователя», он был изобретен в 1946 г. Опытный же экземпляр был изготовлен только в 1952 г., и за шесть лет он, естественно, устарел. Если учесть, что это изобретение так медленно осуществлялось даже при том, что в это время в отделе Леонида Витальевича велись ответственные расчеты по атомной бомбе, можно предположить, что иначе оно вообще не было бы внедрено.

рованный механик.

Здесь пригодился наш опыт в области составления элементов, вычислительных приемов и конструирования устройств, накопленный в процессе работы над «функциональным преобразователем» и некоторыми другими экспериментальными образцами. На основе этих элементов были сконструированы оригинальные образцы настольных счетных автоматов, причем была использована техника, которая не применялась ранее ни у нас, ни за рубежом. Это было зарегистрировано как изобретение [?]. Сконструированные машины были несколько более производительными, чем механические автоматы, и очень простыми в эксплуатации и ремонте — достаточно было замены одного из нескольких типов элементов.

Внедрение их в практику оказалось делом довольно трудным. И в Москве, и в Ленинграде их отказались производить, но, к счастью, тогда было время совнархозов,⁶⁷ и в Кирове нашелся завод и конструкторское бюро, которые были мало загружены и приняли это изобретение к реализации. Всё же в течение года или полутора лет они не приступали к работе, желая создать аналогичную машину, но собственной разработки. Однако работа вошла в план, сроки поджимали, и у нас запросили чертежи. В довольно короткий срок было начато изготовление этих машин на трех заводах, в том числе в Кирове — машина «Вятка» — и в Вильнюсе — машина «Вильнюс» (практически они совпадали).

В течение десяти лет было выпущено около сорока тысяч машин, что в основном удовлетворило нужды страны и позволило по большей части освободиться от импорта. Несмотря на большой эффект от реализации нашего изобретения, авторское вознаграждение мы получили далеко не полностью и не сразу. Лишь около семидесятого года начали производить настольные электронно-счетные клавишные машины, которые первое время были намного дороже и менее удобны в эксплуатации. Но прогресс неизбежен.

Почти сразу же после появления электронных машин началась работа по упрощению и автоматизации программирования. Мы в Ленинграде также включились в эту работу. Основным недостатком существовавшей системы, на мой взгляд, было резкое различие языка для машины и математического языка, на котором описывался алгоритм. В математическом описании использовались символы, крупные операции, различные математические понятия, а в машинной программе все это надо было доводить до стандартных операций над числами. Конечно, большим достижением была система управления и пересылки, в создании которой большую роль сыграл Дж. фон Нейман.

Первым новшеством нашей системы было другое описание вычислительной схемы, именно, в ней применялись не только простейшие арифметические операции, но и многие укрупненные математические операции. Другим, конечно, было то, что элементами схемы были не отдельные числа, а целые их массивы с описаниями расположения и др. В результате схема

⁶⁷ Н. С. Хрущев в начале шестидесятых годов ликвидировал многие отраслевые министерства, передав управление предприятиями региональным структурам — совнархозам. После снятия Хрущева совнархозы были ликвидированы. — Прим. С. С. Кутателадзе.

расчета записывалась с вычислительного плана с логическими связями и переходами, довольно короткого и обозримого.

Для укрупненных операций — упорядочение, скалярное произведение, операции над матрицами и т. д. — были созданы подпрограммы, их реализующие. Также выделялись и специальные операции, если они часто встречались в каком-то расчете. При этом вместо машинных адресов использовались инвентарные адреса, что можно назвать паспортом данных массива или операции. Эта система в соответствии с модным тогда термином, применявшимся в строительстве, была названа «крупноблочным программированием».

Эти идеи имели и другое воплощение — благодаря использованию логической схемы для записи процесса расчета появлялась возможность оперирования с этими схемами и их применения не только для численных, но и для аналитических выкладок. Скажем, программа позволяла производить аналитическое дифференцирование любой функции, составленной из элементарных или специальных. Эти работы велись начиная с 1953 г., но возможность первых публикаций относится к 1956 г. [93, 94, 95, 96].

Довести эту работу до конца и создать цельную систему автоматизированного программирования не удалось. Как известно, создание таких систем требует десятков и сотен разработчиков. Кроме того, в нашей системе несколько большее место занимали операции управления, так что при тогдашнем голоде машинного времени ее было целесообразно применять только к массовым задачам. Схемная запись вычислительных планов нашла использование в созданной в Киеве машине «Мир-3», а впоследствии использовалась физиками для проведения на машинах сложных аналитических выкладок [97].

В это же время были составлены (в командном и автоматизированном исполнении) программы для решения задач линейного программирования, в частности, для транспортной задачи. В компактной и быстродействующей программе, опубликованной в 1958 г. М. А. Яковлевой, был реализован метод потенциала [98]. Разработкой этих программ и системы «крупноблочного» программирования занимались мои сотрудники Л. Т. Петрова, В. А. Булавский, М. А. Яковлева, Р. А. Звягина.

Функциональный анализ и приближенные методы

Я уже говорил о своем исследовании функциональных уравнений в упорядоченных пространствах, где мне впервые удалось связать свои работы по функциональному анализу с работами в области вычислительной математики [?, ?]. Однако в полной мере я смог это осуществить уже в послевоенные годы. В большой статье, охватывающей несколько циклов моих исследований, само название которой звучало тогда парадоксально — «Функциональный анализ и прикладная математика» [99], были указаны

широкие возможности разнообразных применений идей функционального анализа для развития вычислительной математики и установлены разнообразные связи между ними. В этой работе содержалась общая теория приближенных методов и были изучены следующие группы методов: 1) метод наискорейшего спуска и другие градиентные методы; 2) методы ньютоновского типа; 3) принцип мажорант и методы последовательного приближения.

Из этого цикла работ наиболее важной мне представляется работа по общей теории приближенных методов [?]. Имеется весьма большое число различных приближенных методов для разных классов задач и уравнений, и их конструирование и исследование в каждом конкретном случае представляло немалые трудности. Поэтому возникла мысль о построении общей теории приближенных методов, которая позволяла бы их строить и исследовать из некоего единого источника. Эта теория основывалась на идее связи данного пространства, в котором задано исследуемое уравнение, с некоторым более простым, в которое исходное пространство отображается. На основе исследования «приближенного уравнения» в более простом пространстве открывалась возможность строить и изучать конкретные приближенные методы в исходном пространстве. Удалось доказать общие теоремы, позволявшие на основании сведений о точном решении устанавливать разрешимость приближенного уравнения и сходимости приближенного решения к точному, а также теоремы, позволяющие на основе разрешимости приближенного уравнения устанавливать существование точного решения и определять область его расположения.

Помимо порожденного на этой базе огромного числа эффективных расчетных методов с точной характеристикой быстроты сходимости, она дает и ряд важных средств теоретического анализа. С ее помощью в ряде случаев может строго доказываться существование решения, устанавливаться область единственности и некоторые свойства решения. Приближенное решение может получаться не численно, а в формульном виде на компьютере. Эта новая область математики получила название «доказательные вычисления».

Теория получила многочисленные применения во многих вопросах. Назову работы В. С. Владимирова об уравнениях «переноса» [101], А. И. Каландия [102], Э. Б. Карпиловской [103]. В частности, в последней работе на основе общей теории была доказана сходимость метода коллокации для дифференциального уравнения, что не удавалось сделать впрямую.

Мне кажется, что основная идея этой теории носит общий характер и отражает общий гносеологический принцип исследования сложных систем. Он, разумеется, применялся и раньше, применяется и в системном анализе, но не имеет строгого математического аппарата. Попросту этот принцип состоит в том, что данная большая сложная система, расположенная в некотором пространстве, сопоставляется с более простой, малоразмерной моделью, расположенной в этом же или более простом пространстве, посредством однозначного или одно-многочленного соответствия. Изучение этой упрощенной модели оказывается, естественно, более доступным и осу-

ществимым. Этот метод предъявляет, конечно, определенные требования к качеству аппроксимирующей системы.

Имеются различные средства построения таких упрощенных систем. Скажем, в экономике — изучение малоразмерных задач, глобальных моделей. Одним из общих приемов построения таких упрощенных систем является метод агрегирования. Чрезвычайно актуальным для экономики является исследование вопроса о близости решения, принимаемого на основе агрегированной модели и расположенного в аппроксимирующем пространстве, полученном посредством агрегирования переменных, к искомому решению, расположенному в исходном пространстве. Другим общим приемом является отображение, основанное на использовании в качестве нормы в исходном пространстве элементов некоторого полуупорядоченного пространства. Скажем, функция нормируется не своим максимумом на всем интервале, а некоторым набором чисел — максимальными значениями на подынтервалах. Очевидно, что такая норма гораздо точнее характеризует функцию.

Так или иначе большие системы упрощаются до систем меньшей размерности, но все же достаточно близких к ним. В теории приближенных методов общие принципы и конкретные теоремы позволяют на основе исследования малых, более простых систем делать заключения о первоначальной большой системе — существование решения, его единственность, асимптотические свойства, наконец, получать численные оценки. Мне представляется, что должным образом обобщенная теория типа теории приближенных методов должна найти широкие применения в системном анализе и в экономических исследованиях.

Опираясь на результаты и теоремы общей теории, удалось исследовать и трактовать многие приближенные методы решения сложных уравнений. В частности, на основе изучения функциональных уравнений в банаховых пространствах были получены условия сходимости метода наискорейшего спуска [104], причем, любопытно, в такой обобщенной трактовке оценки сходимости оказались предельно точными. Метод наискорейшего спуска получил и интересные теоретические приложения. Так, в работе моего аспиранта из Венгрии Ласло Цаха [105] были доказаны прежде трудно устанавливаемые теоремы Жиро об уравнениях в частных производных, при этом он опирался как на исследования по методу наискорейшего спуска, так и на некоторые результаты конструктивной теории функций.

Ряд глубоких результатов был получен при исследовании обобщенного метода Ньютона для функциональных уравнений [106, 107]. Для него были даны точные оценки сходимости, области расположения решения и установлены другие аналитические факты. Принципиально важным было то, что эта теория была приложима не только к численному решению задач, но и к качественному их анализу. Эта работа нашла широкие применения, в частности, в фундаментальном исследовании А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда о движении небесной системы,⁶⁸ работах В. П. Маслова и других,

⁶⁸ В предисловии к большой обзорной статье, излагающей эту знаменитую работу (В.

а также во многих прикладных работах. Исследования по методу Ньютона вошли во многие учебники.

Еще более простое обоснование и несколько более точные оценки были получены на основе теорем о мажорации, связанных с нормировкой исходного пространства элементами полуупорядоченных пространств [108, 109].

Москва, январь—март 1986 г.

Список литературы

- [1] V. V. Stepanov. Sur les suites des fonctions continues. // *Fundamenta Mathematicae*, 1928, 11, pp. 264–272.
- [2] Yu. A. Goldowsky. Sur les suites des fonctions continues. // *Fundamenta Mathematicae*, 1928, 11, pp. 275–276.
- [3] L. V. Kantorovich. Sur les suites des fonctions rentrant dans la classification de M. W. H. Young. // *Fundamenta Mathematicae*, 1929, 13, pp. 178–185.
- [4] Л. В. Канторович. Об обобщенных производных непрерывных функций. // Матем. сборник, 1932, 39:4, с. 153–170.
- [5] Л. В. Канторович. Об универсальных функциях. // Журнал физ.-матем. общ. Ленинград, 1929, 2:2, с. 13–21.
- [6] L. V. Kantorovich. Sur les suites des fonctions presque partout continues. // *Fundamenta Mathematicae*, 1930, 16, pp. 25–28.
- [7] L. V. Kantorovich. Un exemple d'une fonctions semicontinue, universelle pour les fonction continues *Fundamenta Mathematicae*, 1932, 18, pp. 178–181.
- [8] N. N. Lusin. Leçons sur les ensembles analytiques et leur applications. Paris, 1930.
- [9] L. V. Kantorovich. Sur les ensembles projectifs de la deuxième classe. // *Compt. Rend. Ac. Sci. (Paris)*, 1929, 189:27, pp. 1233–1235.
- [10] L. V. Kantorovich, E. M. Livenson. Sur les δ s fonctions de M/ Hausdorff. // *Compt. Rend. Ac. Sci. (Paris)*, 1930, 190:6, pp. 352–354.
- [11] L. V. Kantorovich, E. M. Livenson. Sur les ensembles projectifs de M. Lusin. // *Compt. Rend. Ac. Sci. (Paris)*, 1930, 190:19, pp. 1113–1115.
- [12] L. V. Kantorovich, E. M. Livenson. Memoir on the analytical operations and projective sets. // *Fundamenta Mathematicae*, (I): 1932, 18, pp. 214–279, (II): 1933, 20, pp. 54–97.
- [13] А. Н. Колмогоров. Об операциях над множествами. // Матем. сборник, 1928, 35, с. 414–418.
- [14] L. V. Kantorovich, E. M. Livenson. Sur quelques théorèmes concernant la théorie des ensembles projectifs. // *Compt. Rend. Ac. Sci. (Paris)*, 1937, 204:7, pp. 466–468.
- [15] Ф. Хаусдорф. Теория множеств. М.: Л.: ОНТИ, 1937.
- [16] Л. В. Канторович. О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна. // Доклады АН СССР, 1930, # 20–21, с. 563–568, 595–600.
- [17] L. V. Kantorovich. La représentation explicite d'une fonction mesurable arbitraire dans la forme de la limite d'une suite polynômes. // Матем. сборник, 1934, 41:3, с. 503–510.
- [18] Л. В. Канторович. Несколько замечаний о приближении к функциям посредством полиномов с целыми коэффициентами. // Известия АН СССР, 1931, # 9, с. 1163–1168.
- [19] А. О. Гельфонд. О равномерных приближениях многочленами с целыми рациональными коэффициентами. // Успехи матем. наук, 1955, 10:1, с. 41–65.

И. Арнольд. Малые знаменатели // УМН, 1963, т. 18, вып. 6), перечисляются используемые в ней идеи и конструкции. Это: 1) методы, разработанные астрономами XIX века и завершённые в исследованиях А. Пуанкаре; 2) исследования по устойчивости положений равновесия и периодических движений; 3) метод последовательных приближений ньютоновского типа.

- [20] *Л. В. Канторович*. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала. // Известия АН СССР, 1931, # 8, с. 1103–1115.
- [21] *S. N. Bernstein*. Sur le domaine de convergence des polynomes $B - nf(x) = \sum_0^n C_n^m f(m/n)x^m(1-x)^{n-m}$. // Compt. Rend. Ac. Sci. (Paris), 1936, 202, pp. 1356–1358.
- [22] *S. N. Bernstein*. Sur la convergence de certaines suites des polynômes. // Journ. Math. Pure et Appl., 1936, 15, pp. 345–358.
- [23] *С. Н. Бернштейн*. О сходимости многочленов $\sum_0^n C_n^m f(m/n)x^m(1-x)^{n-m}$ в комплексной области. // Известия АН СССР, 1943, :7, с. 49–88.
- [24] *А. Н. Крылов*. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: Издательство АН СССР, 1931.
- [25] *Л. В. Канторович*. Применение интеграла Стильтеса к расчету балки, лежащей на упругом основании. // Труды Ленингр. Института инж.-пром. строительства, 1934, 1, с. 17–34.
- [26] *Л. В. Канторович*. Об одном обобщении интегралов Стильтеса. // Доклады АН СССР, 1934, 4:8/9, с. 417–421.
- [27] *Л. В. Канторович*. К теории интегралов Стильтеса – Римана. // Ученые записки Ленингр. гос. универс. 1939, 37:6, с. 52–68.
- [28] *N. M. Günther*. Sur les intégrales de Stiltjes et leurs applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. // Труды физ.-матем. института Акад. Наук, 1932, 1, с. 1–494.
- [29] *В. И. Смирнов, В. И. Крылов, Л. В. Канторович*. Вариационное исчисление. Л.: КУБУЧ, 1933.
- [30] *Л. В. Канторович*. Один прямой метод решения задачи о минимуме двойного интеграла. // Известия АН СССР, 1933, 5, с. 647–652.
- [31] *Л. Е. Эльсгольц*. Вариационное исчисление. М.: Гостехиздат, 1952.
- [32] *Л. В. Канторович*. Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. // Прикладн. матем. и механика, 1942, 6:1, с. 31–40.
- [33] *А. А. Дородницын*. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. // Журн. прикл. мех. техн. физ., 1960, 3, с. 111–118.
- [34] *О. М. Белоцерковский*. Обтекание осесимметричного профиля с отходящей ударной волной. // Прикладн. матем. и механика, 1958, 22, с. 206–219.
- [35] *О. М. Белоцерковский*. О расчете обтекания осесимметричных тел с отходящей ударной волной на электронной счетной машине. // Прикладн. матем. и механика, 1960, 24, с. 511–517.
- [36] *П. И. Чушкин*. Расчет некоторых звуковых течений газа. // Прикладн. матем. и механика, 1957, 21, с. 353–360.
- [37] *I. S. Sokolnikoff*. Mathematical theory of elasticity. New York, 1946.
- [38] *А. И. Лурье*. Приближенное решение некоторых задач о кручении и изгибе стержня. // Труды Ленингр. Индустр. инст., 1939, 3:1, С. 121–156.
- [39] *Н. Х. Арутюнян*. Приближенное решение проблемы кручения стержней с полигональным поперечным сечением. // Прикладн. матем. и механика, 1942, 6, с. 19–31.
- [40] *Н. Х. Арутюнян*. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. // Прикладн. матем. и механика, 1949, 13, с. 107–112.
- [41] *Л. В. Канторович*. О некоторых методах построения функции, совершающей конформное отображение. // Известия АН СССР, 1933, # 2, с. 229–235.
- [42] *Л. В. Канторович*. О конформном отображении. // Матем. сборник, 1933, 40, с. 294–325.
- [43] *Г. М. Голузин*. Метод вариаций в конформном отображении. // Матем. сборник, 1946, 19, с. 203–236.
- [44] *Л. В. Канторович*. О конформном отображении многосвязных областей. // Доклады АН СССР, 1934, 2:8, с. 441–445.
- [45] *Л. В. Канторович*. Конформное отображение круга на односвязную область. Конформное отображение односвязных и многосвязных областей, Л.:, 1937, с. 5–17.

- [46] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов.* Методы приближенного решения уравнений в частных производных. // М.: Л.: 1936.
- [47] *Л. В. Канторович.* Об общих методах улучшения сходимости и способах приближенного решения граничных задач математической физики. // Труды Ленингр. института инженеров пром. строительства, 1934, 1:2, с. 65–72.
- [48] *Н. П. Стенин.* Определение параметров в формуле Кристоффеля – Шварца. // Конформное отображение односвязных и многосвязных областей, Л.: 1937, с. 47–70.
- [49] *Л. В. Канторович.* Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. // Доклады АН СССР, 1934, 2:9, с. 532–536.
- [50] *W. J. Duncan.* Galerkin's method in mechanics and differential equations. // Great Brit. Aeronaut. Res. Comm. Reports and Mem., No 1798, 1937.
- [51] *Л. В. Канторович.* Об особых приемах интегрирования четных и нечетных функций. // Труды Матем. института АН СССР, 1949, 28, с. 3–25.
- [52] *Г. И. Петров.* Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. // Прикладн. матем. и механика, 1940, 4:3, с. 3–11.
- [53] *М. В. Келдыш.* О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач. // Известия АН СССР, 1942, # 6, с. 309–330.
- [54] *L. V. Kantorovich.* Über die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen, die von einem stetigen Parameter abhängen. // Compositio Mathematica, 1935, 2:3, с. 406–416.
- [55] *G. M. Fichtenholz, L. V. Kantorovich.* Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées. // Studia Mathematica, 1935, 5, pp. 69–98.
- [56] *Г. М. Фихтенгольц, Л. В. Канторович.* Некоторые теоремы о линейных функционалах. // Доклады АН СССР, 1934, 3:5, с. 307–312.
- [57] *Л. В. Канторович.* О продолжении семейства линейных функционалов. // Доклады АН СССР, 1935, 6:4, с. 204–210.
- [58] *S. S. Kutateladze.* Об одном признаке Гильбертова пространства. // Оптимизация, 1982, 28, с. 146–147.
- [59] *Л. В. Канторович.* О некоторых общих методах распространения пространства Гильберта. // Доклады АН СССР, 1935, 4:3, с. 115–118.
- [60] *Л. В. Канторович.* Некоторые частные методы расширения пространства Гильберта. // Доклады АН СССР, 1935, 4:4/5, с. 163–167.
- [61] *Л. В. Канторович.* О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций. // Доклады АН СССР, 1935, 4:1/2, с. 13–16.
- [62] *L. V. Kantorovich.* Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés lineare. // Compt. Rend. Ac. Sci. (Paris), 1936, 202:10, pp. 813–816.
- [63] *Fr. Riesz.* Sur la decomposition des opérations fonctionelles. // Atti del Congresso int. dei mat., Bologna, 1928, 3, pp. 143–148.
- [64] *Гарретт Биркгоф.* Теория структур. М.: Издательство иностранной литературы, 1952.
- [65] *L. V. Kantorovich, B. Z. Vulikh.* Sur la représentation des opérations linéaires. // Compositio Mathematica, 1937, 5, pp. 119–165.
- [66] *L. V. Kantorovich, B. Z. Vulikh.* Sur un théorème de M. N. Dunford. // Compositio Mathematica, 1938, 5:3, pp. 430–432.
- [67] *I. M. Gelfand.* Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren. // Матем. сборник, 1938, 4(46), с. 235–286.
- [68] *А. Г. Пинскер.* О расширении полуупорядоченных пространств. // Доклады АН СССР, 1938, 21:1–2, с. 6–10.
- [69] *Л. В. Канторович.* О функциональных уравнениях. // Ученые записки Ленингр. гос. универс., 1937, 3:17, с. 24–50.
- [70] *L. V. Kantorovich.* The method of successive approximations for functional equations. // Acta Math., 1939, 71, pp. 63–97.
- [71] *Дж. Б. Данциг, Л. Р. Форд, Д. Б. Фулкерсон.* Алгоритм для одновременного решения прямой и двойственной задач линейного программирования. // Линейные неравенства и смежные вопросы, М.: Издательство иностранной литературы, 1959, с. 277–286.

- [72] *Л. В. Канторович*. Математические методы организации и планирования производства. // Л.: Изд-во университета, 1939.
- [73] *Л. В. Канторович*. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем. // Доклады АН СССР, 1940, 28:3, с. 212–215.
- [74] *Дж. Б. Данциг*. Линейное программирование, его обобщения и применения. М.: Прогресс, 1966.
- [75] *А. Н. Толстой*. Методы устранения нерациональных перевозок при составлении оперативных планов. М.: Трансжелдориздат, 1941.
- [76] *Л. В. Канторович, М. К. Гавурин*. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М.: Л.: Издательство АН СССР, 1949, с. 110–138.
- [77] *Л. В. Канторович*. О перемещении масс. // Доклады АН СССР, 1942, 37:7–8, с. 227–229.
- [78] *Л. В. Канторович*. Подбор поставок, обеспечивающих максимальный выпуск пилопродукции в заданном ассортименте. // Лесная промышленность, 1949, с. # 7, 15–17, # 8, 17–19.
- [79] *Л. В. Канторович*. Определенные интегралы и ряды Фурье. // Л.: Изд-во ЛГУ, 1940.
- [80] *Л. В. Канторович*. Теория вероятностей. Л.: 1946.
- [81] *L. V. Kantorovich*. Некоторые замечания о методе Ритца. // Труды Высшего инжен.-техн. училища, 1941, # 3, с. 3–16.
- [82] *Л. В. Канторович*. О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. // Доклады АН СССР, 1941, 30:7, с. 579–582.
- [83] *Л. В. Канторович*. О сходимости вариационных процессов. // Доклады АН СССР, 1941, 30:2, с. 107–111.
- [84] *N. M. Kryloff, N. N. Bogoliouboff*. Application de la méthode de l'algorithme variationnel à la solution approchée des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique. ... // Известия АН СССР, 1930, # 1, с. 43–71, 2, 105–114.
- [85] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов*. Приближенные методы высшего анализа. М.: Л.: Гостехиздат, 1941.
- [86] *В. П. Ильин*. Оценки функций, имеющих производные, суммируемые с данной степенью, на гиперплоскостях различных размерностей. // Доклады АН СССР, 1951, 78, с. 633–636.
- [87] *В. П. Ильин*. Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов. // Труды Матем. института АН СССР, 1959, 53, с. 64–127.
- [88] *И. Ю. Харрик*. Об одной проблеме конструктивной теории функций, связанной с исследованием сводимости вариационных процессов. Доклады АН СССР, 1951, 80:1, с. 25–28.
- [89] *Л. В. Канторович, М. К. Гавурин*. О некоторых новых приемах вычисления на табуляторе, связанных с использованием двоичных разложений чисел. // Успехи матем. наук, 1948, 3:4, с. 160–162.
- [90] *М. К. Гавурин, В. Н. Фаддеева*. Таблицы функций Бесселя $J_n(x)$ целых номеров от 0 до 120. М.: Л.: 1950.
- [91] *Л. В. Канторович, М. К. Гавурин, В. Л. Эпштейн*. Функциональный преобразователь. Авторское свидетельство СССР # 98671 от 3.10.1950. Опубл. 30.09.54.
- [92] *Л. В. Канторович, Ю. П. Петров, Н. Н. Поснов*. Релейная клавишная машина для автоматического выполнения арифметических операций. Авторское свидетельство СССР # 1123762 от 29.03.1958. Опубл. 09.09.59.
- [93] *Л. В. Канторович, Л. Т. Петрова*. Об одной математической символике, удобной при вычислениях на машинах. // Труды 3го Всесоюзного математического съезда, 1956, т. 2, с. 151.
- [94] *Л. В. Канторович*. Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машинах. // Доклады АН СССР, 1957, 113:4, с. 738–741.
- [95] *Л. В. Канторович*. О проведении численных и аналитических вычислений на машинах с программным управлением. // Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1957, 10:2, с. 3–16.

- [96] *Л. В. Канторович, Л. Т. Петрова, М. А. Яковлева.* Об одной системе программирования. // Труды конференции «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения». М.: ВИНТИ, 1958, ч. 3, с. 30–36.
- [97] *О. В. Тарасов, Д. Б. Ширков, В. П. Герт.* Аналитические вычисления на машинах в применении к физике и математике. // Успехи физич. наук, 1980, 130, с. 113–147.
- [98] *М. А. Яковлева.* Задача о минимуме транспортных затрат. // Применение математики в экономических исследованиях. М., 1959, 1, с. 390–399.
- [99] *Л. В. Канторович.* Функциональный анализ и прикладная математика. // Успехи матем. наук, 1948, 3:6, с. 89–185.
- [100] *Л. В. Канторович.* К общей теории приближенных методов анализа. // Доклады АН СССР, 1948, 60:6, с. 957–960.
- [101] *В. С. Владимиров.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. М.: Наука, 1961.
- [102] *А. И. Каландрия.* Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости. // Матем. сборник, 1957, 42, с. 249–272.
- [103] *Э. Б. Карпиловская.* О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Успехи матем. наук, 1953, 8:3, с. 111–118.
- [104] *Л. В. Канторович.* О методе наискорейшего спуска. // Доклады АН СССР, 1947, 56:3, с. 233–236.
- [105] *L. Szász.* Метод наискорейшего спуска для дифференциальных уравнений эллиптического типа. // Автореферат дисс. ... канд. физ.-мат наук. Л.: ЛГУ, 1955.
- [106] *Л. В. Канторович.* О методе Ньютона для функциональных уравнений. // Доклады АН СССР, 1948, 59:7, с. 1237–1240.
- [107] *Л. В. Канторович.* О методе Ньютона. // Труды Матем. института АН СССР, 1949, 28, с. 3–25.
- [108] *Л. В. Канторович.* Принцип мажорант и метод Ньютона. // Доклады АН СССР, 1951, 76:1, с. 17–20.
- [109] *Л. В. Канторович.* Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант. // Доклады АН СССР, 1951, 80:6, с. 849–852.