КОНТАКТНЫЕ ЧИСЛА И СФЕРИЧЕСКИЕ КОДЫ*

Н. О. Котелина nad7175@yandex.ru

А. Б. Певный pevnyi@syktsu.ru

26 марта 2011 г.

Инициирующей для нас работой послужила статья Н. Н. Андреева и В. А. Юдина [1]. Для оценки контактных чисел M_n сверху используется теорема Дельсарта [2], которая при $n = 8$ и 24 даёт точный результат.

1°. В $\mathbb{R}^n$ определены скалярное произведение $xy = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ векторов x, y и норма $|x| = \sqrt{xx}$. Рассмотрим шар $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leqslant r\}$ радиуса $r > 0$. Будем искать шары $B(x_i, r)$, $i \in 1 : m$, касающиеся шара $B(x_0, r)$, но при этом $B(x_i, r)$ и $B(x_j, r)$ при $1 \leqslant i < j \leqslant m$ не должны иметь общих внутренних точек. Эти условия можно записать так:

$$|x_i - x_0| = 2r, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$
$$|x_i - x_j| \geqslant 2r, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant m. \tag{2}$$

Какое максимальное количество m шаров $B(x_i, r)$ можно прикоснуть к данному шару $B(x_0, r)$ так, чтобы выполнялись условия (1) *и* (2)?

Через M_n обозначим максимально возможное m. Число M_n зависит только от n и называется *контактным числом*. Используется также английский термин “kissing number”. Известны контактные числа $M_2 = 6$, $M_3 = 12$, $M_4 = 24$. О них имеется обширная литература (см. ссылки в [5–7]). Число $M_3 = 12$ правильно указано Ньютоном в 1694 г. Из многочисленных доказательств отметим работу [8]. Равенство $M_4 = 24$ очень сложным образом доказал О. Мусин [7].

Обратимся теперь к сферическим кодам. *Сферическим кодом* называется любое конечное множество C на сфере $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$. Рассмотрим

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

случай, когда угол между векторами кода не меньше 60°, то есть выполнено неравенство

$$xy \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad \forall\, x,\ y \in C, \quad x \neq y. \tag{3}$$

Такой код C будем называть $\frac{1}{2}$-кодом. Условие (3) равносильно неравенству

$$|x-y|^2 = |x|^2 - 2xy + |y|^2 = 2(1-xy) \geqslant 1,$$

то есть расстояние между точками кода не меньше 1.

Какое максимальное количество точек может иметь $\frac{1}{2}$*-код на сфере* S^{n-1}*?*

Через A_n обозначим максимальное количество векторов $\frac{1}{2}$-кода. Справедливо равенство

$$A_n = M_n. \tag{4}$$

Действительно, возьмём $\frac{1}{2}$-код $C = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset S^{n-1}$, где $m = A_n$, основной шар $B(\mathbb{O}, \frac{1}{2})$ и приклеим к нему шары $B(x_i, \frac{1}{2})$, $i \in 1 : m$. Условия (1) и (2) выполнены при $x_0 = \mathbb{O}$ и $r = \frac{1}{2}$, поэтому $A_n \leqslant M_n$. Обратное неравенство столь же очевидно.

Многочисленные примеры $\frac{1}{2}$-кодов можно получить, рассматривая минимальные векторы решеток (см. об этом [1]), а оценку сверху для $A_n = M_n$ дает теорема Дельсарта [2].

2°. В начале 1970-х годов Ф. Дельсарт предложил замечательный метод оценки A_n сверху, использующий специальные полиномы $\{G_k^{(n)}(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Эти полиномы обладают свойствами:

1) $G_k^{(n)}(t)$ — алгебраический полином степени k;
2) полиномы $\{G_k^{(n)}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ образуют ортогональную систему на $[-1,1]$ с весом $w_n(t) = (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}$;
3) выполнено условие нормировки $G_k^{(n)}(1) = 1$;
4) для любых $x_1, \ldots, x_m \in S^{n-1}$ матрица $\{G_k^{(n)}(x_i\, x_j)\}_{i,j=1}^{m}$ неотрицательно определена; в частности,

$$\sum_{i,j=1}^{m} G_k^{(n)}(x_i\, x_j) \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Полиномы $G_k^{(n)}(t)$ являются частным случаем полиномов Гегенбауэра $P_k^{(\alpha,\alpha)}(t)$ при $\alpha = (n-3)/2$ (см. [3]) с изменённым условием нормировки. Поэтому в дальнейшем полиномы $G_k^{(n)}(t)$ будем называть полиномами Гегенбауэра. Доказательство свойства неотрицательной определённости приводится в докладе [4].

ТЕОРЕМА 1 (Дельсарт)**.** *Пусть $f(t)$ — полином степени d, удовлетворяющий условиям:*

1) $f(t) \leqslant 0$ *при* $t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$;

2) *коэффициенты разложения $f(t)$ по полиномам Гегенбауэра*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{d} f_k^{(n)} G_k^{(n)}(t)$$

неотрицательны и $f_0^{(n)} > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$A_n \leqslant f(1)/f_0^{(n)}.$$

Доказательство. Возьмём произвольный $\frac{1}{2}$-код $C = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset S^{n-1}$. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{i,j=1}^{m} f(x_i\, x_j) = f_0^{(n)} m^2 + \sum_{k=1}^{d} f_k^{(n)} \sum_{i,j=1}^{m} G_k^{(n)}(x_i\, x_j). \tag{6}$$

В силу условия 2) и неравенства (5) $S \geqslant f_0^{(n)} m^2$. Вместе с тем в силу условия 1) и неравенства (3) имеем $f(x_i\, x_j) \leqslant 0$ при $i \neq j$. Отсюда следует, что $S \leqslant m f(1)$.

В результате получаем $f_0^{(n)} m^2 \leqslant S \leqslant m f(1)$, откуда

$$m \leqslant \frac{f(1)}{f_0^{(n)}}. \tag{7}$$

Ввиду произвольности кода C получим утверждение теоремы. □

3°. Допустим, что нашёлся сферический $\frac{1}{2}$-код $C = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и полином $f(t)$, удовлетворяющий условиям теоремы, такие, что выполнено равенство $m = f(1)/f_0^{(n)}$. Тогда

$$f_0^{(n)} m^2 = S = m f(1).$$

Учитывая, что $S = m f(1) + \sum_{i \neq j} f(x_i\, x_j)$, получаем

$$\sum_{i \neq j} f(x_i\, x_j) = 0.$$

Здесь все слагаемые $f(x_i\, x_j)$ неположительны, поэтому

$$f(x_i\, x_j) = 0 \qquad \text{для всех пар } (i,\, j),\ i \neq j. \tag{8}$$

Значит, скалярные произведения $t_{ij} = x_i\,x_j$ при $i \neq j$ должны быть корнями полинома $f(t)$.

Кроме того, из (6) следует, что

$$f_k^{(n)} \sum_{i,j=1}^{m} G_k^{(n)}(x_i\,x_j) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, d. \tag{9}$$

Если $f_k^{(n)} > 0$, то сумма должна равняться нулю.

Эти соображения позволяют построить экстремальный полином $f(t)$ при $n = 8$ и $n = 24$.

4°. При $n = 8$ максимальный $\frac{1}{2}$-код образуют минимальные векторы решетки E_8 в пространстве $\mathbb{R}^8$:

$$E_8 = \Big\{ x \in \mathbb{R}^8 \mid \text{ все } x_i \in \mathbb{Z} \text{ или все } x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2};\ \sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0 \pmod 2 \Big\}.$$

Напомним, что $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_8^2$. Минимальные векторы решетки являются решением задачи

$$|x|^2 \to \min,$$
$$x \in E_8,\ x \neq \mathbb{O}.$$

В $E_8 \setminus \{\mathbb{O}\}$ минимальную норму имеют 240 векторов следующего вида:

1) векторы вида $\xi = (\pm 1^2, 0^6)$, содержащие две ± 1 и шесть нулей. При этом $|\xi| = \sqrt{2}$, а количество таких векторов равно $2^2 C_8^2 = 112$.

2) векторы вида $\xi = \left(\pm\frac{1}{2}^8\right)$ с чётным числом плюсов (это условие равносильно включению $\xi \in E_8$). При этом $|\xi| = \sqrt{2}$ и количество таких векторов равно $C_8^0 + C_8^2 + C_8^4 + C_8^6 + C_8^8 = 128$. В результате получим множество векторов $\{\xi_1, \ldots, \xi_{240}\}$.

ЛЕММА. *При $i \neq j$ скалярные произведения $\xi_i \xi_j$ могут принимать только следующие значения: -2, -1, 0, 1.*

Доказательство. По неравенству Коши-Буняковского $-2 \leqslant \xi_i\,\xi_j < 2$. Если ξ_i из первой группы векторов, то $\xi_i\,\xi_j$ будет целым числом.

Допустим, что векторы $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_8)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_8)$ из второй группы. В каждом векторе чётное число плюсов. Пусть $I = \{k \mid \xi_k\,\eta_k > 0\}$. Тогда $p = |I|$ — чётное число и

$$\xi\eta = \frac{p}{4} - \frac{8-p}{4} = \frac{2p}{4} - 2 \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $\xi\eta \in \{-2, -1, 0, 1\}$. Лемма доказана. $\square$

Следующая теорема установлена независимо в двух работах: Левенштейн [9] и Одлыжко, Слоэн [10] (см. также главу 13 в книге [5], написанную теми же авторами).

ТЕОРЕМА 2. *При* $n = 8$ *справедливы равенства* $A_8 = M_8 = 240$. *Максимальный* $\frac{1}{2}$*-код образуют точки*

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 240.$$

Идея доказательства. Авторы [10] используют теорему Дельсарта. Поскольку $x_i\,x_j \in \left\{-1,\, -\frac{1}{2},\, 0,\, \frac{1}{2}\right\}$ при $i \neq j$, то ввиду условия (8) авторы [10] берут полином

$$f(t) = \frac{320}{3}(t+1)\big(t+\tfrac{1}{2}\big)^2\, t^2\big(t-\tfrac{1}{2}\big).$$

Коэффициент поставлен авторами [10] для того, чтобы $f_0^{(8)} = 1$. Далее $f(t)$ нужно разложить по полиномам Гегенбауэра $G_k^{(8)}(t)$, $k \in 0 : 6$. Приведём алгоритм вычислений в системе MAPLE.

Алгоритм.

1. В массив `G(0..6)` запишем выражения для полиномов Гегенбауэра, используя рекуррентную формулу. Основные операторы: `G[0]:=1; G[1]:=t; G[k+1]:=simplify(((2*k+n-2)*t*G[k]-k*G[k-1])/(k+n-2)).`

2. Вычислим матрицу Грама

   $$H_{kl} = \big(G_k^{(n)}, G_l^{(n)}\big) := \int_{-1}^{1} G_k^{(n)}(t)\, G_l^{(n)}(t)\, w_8(t)\, dt, \quad k,\ l \in 0 : 6.$$

   Убедимся, что $H_{kl} = 0$ при $k \neq l$. Нам потребуются только $H_{kk} = \|G_k^{(n)}\|^2$. Интегралы будут вычислены точно, например, $H_{00} = \frac{5}{16}\pi$.

3. Вычислим коэффициенты разложения

   $$f(t) = \sum_{k=0}^{6} f_k^{(8)} G_k^{(8)}(t)$$

   по формуле

   $$f_k^{(8)} = \frac{\big(f, G_k^{(8)}\big)}{\big(G_k^{(8)}, G_k^{(8)}\big)} = \frac{1}{H_{kk}} \int_{-1}^{1} f(t)\, G_k^{(8)}(t)\, w_8(t)\, dt, \quad k \in 0 : 6.$$

4. Напечатаем коэффициенты $f_0^{(8)}, \dots, f_6^{(8)}$ в строчку с помощью оператора `convert(f,list)`:
$$\left[1,\ 8,\ 25,\ 52,\ \tfrac{133}{2},\ 60,\ \tfrac{55}{2}\right].$$

5. Вычислим $f(1)$ двумя способами:
$$f(1) = \tfrac{320}{3} \cdot 2 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2} = 240,$$
$$f(1) = \sum_{k=0}^{6} f_k^{(8)} G_k^{(8)}(1) = \sum_{k=0}^{6} f_k^{(8)} = 240.$$

Окончательный вывод. По теореме Дельсарта
$$A_8 = M_8 \leqslant \frac{f(1)}{f_0^{(8)}} = 240.$$
Это убеждает нас в справедливости теоремы 2.

Задачи

1. Дан полином $F = a_0 t^d + a_1 t^{d-1} + \ldots + a_d$. Для нахождения коэффициентов разложения по полиномам Гегенбауэра можно использовать следующий процесс. Найдём $\mathtt{a_0} = \mathtt{coeff(F,t,d)}$ — старший коэффициент полинома F и $\mathtt{b_0} = \mathtt{coeff(G[d],t,d)}$ — старший коэффициент полинома $G[d] = G_d^{(n)}(t)$. Положим $\mathtt{f[d]} = \mathtt{a_0}/\mathtt{b_0}$ и вычислим полином $\mathtt{F_1} = \mathtt{F} - \mathtt{f[d]G[d]}$ степени не выше $d-1$. Далее приём применяется к полиному F_1. Написать программу для нахождения коэффициентов разложения $f[d], \dots, f[0]$. Для полинома
$$f(t) = \frac{320}{3}(t+1)\left(t+\tfrac{1}{2}\right)^2 t^2 \left(t-\tfrac{1}{2}\right)$$
при $n = 8$ получаются коэффициенты $(1,\ 8,\ 25,\ 52,\ \tfrac{133}{2},\ 60,\ \tfrac{55}{2})$.

2. Минимальные векторы решетки Лича. Решетка Лича Λ_{24} в $\mathbb{R}^{24}$ (см. [5]) имеет $m = 196560$ минимальных векторов $\xi_1, \dots, \xi_m$. Положим $x_i = \xi_i/|\xi_i|$. Тогда $C = \{x_1, \dots, x_m\}$ является $\tfrac{1}{2}$-кодом и при этом $x_i\, x_j \in \left\{-1,\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{4},\ 0,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2}\right\}$ при $i \neq j$. Для доказательства максимальности кода C в [10] предлагается взять полином
$$f(t) = (t+1)\left(t+\tfrac{1}{2}\right)^2\left(t+\tfrac{1}{4}\right)^2 t^2 \left(t-\tfrac{1}{4}\right)^2\left(t-\tfrac{1}{2}\right).$$
Разложить $f(t)$ по полиномам Гегенбауэра, $f(t) = \sum_{k=0}^{10} f_k^{(24)} G_k^{(24)}(t)$, и показать, что все $f_k^{(24)}$ положительны. Показать, что
$$\frac{f(1)}{f_0^{(24)}} = 196560.$$

Отсюда будет следовать, что $A_{24} = M_{24} = 196560$.

3. Случай n=4. Рассмотрим сферический $\frac{1}{2}$-код $C \subset S^3$, состоящий из 8 векторов $x = (\pm 1, 0^3)$, где ± 1 может стоять на любом из четырёх мест, и 16 векторов $x = \left(\pm\frac{1}{2}^4\right)$. Показать, что $xy \in \left\{-1,\, -\frac{1}{2},\, 0,\, \frac{1}{2}\right\}$ при $x, y \in C$, $x \neq y$. Сформировать матрицу $X(1..24, 1..4)$, строками которой являются указанные векторы x, и матрицу Грама $T = XX'$, где $T_{ij} = x_i x_j$. Разложить полином $f(t) = (t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 t^2 \left(t-\frac{1}{2}\right)$ по полиномам Гегенбауэра, $f(t) = \sum_{k=0}^{6} f_k^{(4)} G_k^{(4)}(t)$.

Показать, что все $f_k^{(4)}$ положительны и $A_4 \leqslant \frac{f(1)}{f_0^{(4)}} = \frac{144}{5} = 28.8$.

Эта оценка является завышенной: О. Мусин [7] показал, что $A_4 = 24$. Причиной этой завышенности является нарушение условия (9). Показать, что $\sum_{i,j=1}^{24} G_6^{(4)}(T_{ij}) = \frac{576}{7}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Н. Н., Юдин В. А. *Арифметический минимум квадратичной формы и сферические коды* // Матем. просвещение. Сер. 3. 1998. Вып. 2. С. 133—140.

2. Delsarte Ph., Goetals J. M., Seidel J. J. *Spherical codes and designs* // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

3. Сегё Г. *Ортогональные многочлены.* М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.

4. Котелина Н. О. *Формула сложения для полиномов Гегенбауэра* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 13 ноября 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1113`)

5. Конвей Дж., Слоэн Н. *Упаковки шаров, решётки и группы.* Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.

6. Pfender F., Ziegler G. M. *Kissing numbers, sphere packings and some unexpected proofs* // Notices AMS. September 2004. P. 873–883.

7. Musin O. R. *The kissing number in four dimensions* // Preprint. 30 pp. (`http://arXiv.org/abs/math/0309430v3`)

8. Maehara H. *The problem of thirteen spheres — a proof for undergraduates* // Europ. J. Combinatorics. 2007. V. 28. P. 1770–1778.

9. Левенштейн В. И. *О границах для упаковок в n-мерном евклидовом пространстве* // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. С. 1299–1303.

10. Odlyzko A. M., Sloane N. J. A. *New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions* // J. Comb. Th. 1979. V. A26. P. 210–214.