ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИФТИНГОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ*

Н. А. Соловьёва

vinyo@mail.ru

19 декабря 2009 г.

В [1, 2] было введено лифтинговое преобразование дискретного периодического сигнала. Формулы обращения позволили получить лифтинговое разложение произвольного сигнала по сдвигам базисных сигналов. В данном докладе устанавливаются дополнительные свойства базисных сигналов. Все доказательства будут основываться только на определениях, без ссылок на природу появления этих сигналов.

1°. Пусть $N = 2^s$, $N_\nu = N/2^\nu$ при $\nu \in 0 : s$ $(N_0 = N)$, r — натуральное число. Введём следующие сигналы:

$$h_\nu(k) = \frac{2\left(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r}}{\left(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r} + \left(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r}}\,,$$

$$g_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-k}\bigl(1 - \beta_\nu(k)\,h_\nu(k)\bigr),$$

$$k \in 0 : N_{\nu-1} - 1, \qquad \nu = 1, \ldots, s.$$

Здесь $\beta_\nu(k)$ — произвольная $N_{\nu-1}$-периодическая функция, такая, что

$$\begin{aligned} \beta_\nu(k + N_\nu) &= -\beta_\nu(k), \\ \beta_\nu(0) &= \tfrac{1}{2}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Сигналы h_ν и g_ν имеют период $N_{\nu-1}$.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Заметим, что

$$h_s(k) = \frac{2\left(\cos\frac{\pi k}{2}\right)^{2r}}{\left(\cos\frac{\pi k}{2}\right)^{2r} + \left(\sin\frac{\pi k}{2}\right)^{2r}} = \begin{cases} 2 & \text{при } k = 0; \\ 0 & \text{при } k = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Положим при $\nu \in 1 : s$

$$H_\nu = h_1 \cdots h_{\nu-1}\, h_\nu\,, \qquad G_\nu = h_1 \cdots h_{\nu-1}\, g_\nu\,.$$

Период сигналов H_ν, G_ν совпадает с периодом h_1 и равен N. Зададим базисные сигналы

$$\varphi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(H_\nu), \qquad \psi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu).$$

2°. В докладе [1] сигнал φ_s был вычислен в явном виде: $\varphi_s(j) \equiv 1$. Это эквивалентно тому, что

$$H_s(k) \equiv N\,\delta_N(k). \tag{3}$$

Относительно сигнала ψ_s верно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При всех* $j \in 0 : N-1$

$$\psi_s(j) = -\varphi_{s-1}(j) + \tfrac{1}{2}\,.$$

Доказательство. По определению

$$G_s(k) = H_{s-1}(k)\, g_s(k). \tag{4}$$

Вычислим значения G_s. Вначале рассмотрим $G_s(0)$. Из (1) и (2) получаем

$$g_s(0) = \omega_2^0\left(1 - \beta_s(0)\, h_s(0)\right) = 0.$$

Из (4) сразу вытекает, что $G_s(0) = 0$.

Вычислим значения $G_s(2q)$, $q \in 1 : \frac{N}{2} - 1$. По определению функций H_ν имеем

$$H_s(2q) = H_{s-1}(2q)\, h_s(2q).$$

Заметим, что $h_s(2q) = 2$ при $q \in 1 : \frac{N}{2-1}$. Кроме того, известно равенство (3). Значит,

$$H_{s-1}(2q) = \frac{N\,\delta_N(2q)}{2}\,,$$

откуда

$$H_{s-1}(2q) = 0, \qquad q \in 1 : \tfrac{N}{2} - 1. \tag{5}$$

Согласно (4), $G_s(2q) = 0$ при $q \in 1 : \frac{N}{2} - 1$. Следовательно,

$$G_s(2q) = 0, \qquad q \in 0 : \tfrac{N}{2} - 1. \tag{6}$$

Вычислим значение сигнала G_s на нечётных индексах. С учётом (2) запишем

$$G_s(2q+1) = H_{s-1}(2q+1)\,\omega_2^{-(2q+1)}\bigl(1-\beta_s(2q+1)\,h_s(2q+1)\bigr) = \\ = -H_{s-1}(2q+1), \qquad q \in 0 : \tfrac{N}{2}-1. \tag{7}$$

На основании (6) и (7) получаем, что при $j \in 0 : N-1$

$$\psi_s(j) = \bigl[\mathcal{F}_N^{-1}(G_s)\bigr](j) = -\tfrac{1}{N}\sum_{q=0}^{N/2-1} H_{s-1}(2q+1)\,\omega_N^{(2q+1)j}. \tag{8}$$

Так как по определению

$$\varphi_{s-1}(j) = \bigl[\mathcal{F}_N^{-1}(H_{s-1})\bigr](j) = \tfrac{1}{N}\sum_{q=0}^{N/2-1} H_{s-1}(2q+1)\,\omega_N^{(2q+1)j} + \\ + \tfrac{1}{N}\sum_{q=0}^{N/2-1} H_{s-1}(2q)\,\omega_N^{(2q)j},$$

то соотношение (8) можно переписать в виде

$$\psi_s(j) = -\varphi_{s-1}(j) + \tfrac{1}{N}\sum_{q=0}^{N/2-1} H_{s-1}(2q)\,\omega_N^{2qj}. \tag{9}$$

Теперь вычислим $H_{s-1}(2q)$ при $q \in 0 : \frac{N}{2}-1$. Имеем $H_{s-1}(0) = h_1(0)\cdots$ $\cdots h_{s-1}(0) = 2^{s-1}$. Кроме того, по формуле (5) $H_{s-1}(2q) = 0$ при $q \in 1 : \frac{N}{2}-1$. Равенство (9) принимает вид

$$\psi_s(j) = -\varphi_{s-1}(j) + \frac{2^{s-1}}{N} = -\varphi_{s-1}(j) + \tfrac{1}{2}\,,$$

а это совпадает с утверждением предложения. $\square$

3°. Для дальнейшего анализа нам потребуются следующие равенства, доказанные в [2]: при всех $j \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_\nu(2j) = \varphi_{\nu-1}(j) + \varphi_{\nu-1}\bigl(j+\tfrac{N}{2}\bigr), \tag{10}$$

$$\varphi_\nu(j) = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l)\,\varphi_{\nu-1}(l), \tag{11}$$

$$\nu = 2, \ldots, s.$$

Кроме того, при всех $\nu \in 1:s$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \psi_\nu(j) = 0. \tag{12}$$

Установим аналог последнего соотношения для сигналов φ_ν.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При всех $\nu \in 1:s$ верно равенство*

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_\nu(j) = 2^\nu.$$

Доказательство. Так как $\varphi_s(j) \equiv 1$, то

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_s(j) = 2^s.$$

Согласно предложению 1 с учётом (12) имеем

$$0 = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_s(j) = -\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{s-1}(j) + 2^{s-1}.$$

Получаем равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{s-1}(j) = 2^{s-1}.$$

Таким образом, для $\nu = s-1$ и $\nu = s$ утверждение доказано.

Воспользуемся тождеством (11) при $\nu = s$:

$$\sum_{l=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l)\, \varphi_{s-1}(l) = \varphi_s(j).$$

Просуммировав последнее равенство по всем $j \in 0:N-1$, получим

$$L := \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l)\, \varphi_{s-1}(l) = 2^s.$$

Левую часть этого равенства перепишем в виде

$$L = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_{s-1}(l) \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_{s-1}(l) \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_1(j) = 2^{s-1} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_1(j).$$

Так как $L = 2^s$, то

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_1(j) = 2.$$

Воспользуемся индукцией по ν. База индукции есть. Проведём индукционный переход от $\nu - 1$ к ν, $\nu = 2, \ldots, s-2$. Просуммируем равенства (11) при всех $j \in 0 : N-1$ и поменяем порядок суммирования в правой части. Получим

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_\nu(j) = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_{\nu-1}(l) \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l) =$$
$$= \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_{\nu-1}(l) \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_1(j) = 2^{\nu-1} \cdot 2 = 2^\nu.$$

Предложение доказано. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При $\nu \in 1 : s$ верны равенства*

$$\sum_{q=0}^{N/2-1} \varphi_\nu(2q) = 2^{\nu-1}, \qquad \sum_{q=0}^{N/2-1} \varphi_\nu(2q+1) = 2^{\nu-1}.$$

Доказательство. Заметим, что с учётом предыдущего предложения достаточно доказать только одно из равенств. Докажем первое.

Формула (10) влечёт

$$\varphi_\nu(2q) = \varphi_{\nu-1}(q) + \varphi_{\nu-1}\big(q + \tfrac{N}{2}\big), \qquad q \in 0 : \tfrac{N}{2} - 1.$$

Суммируя последние равенства по q, получаем

$$\sum_{q=0}^{N/2-1} \varphi_\nu(2q) = \sum_{q=0}^{N/2-1} \varphi_{\nu-1}(q) + \sum_{q=0}^{N/2-1} \varphi_{\nu-1}\big(q + \tfrac{N}{2}\big).$$

С учётом предложения 2 отсюда сразу следует, что

$$\sum_{q=0}^{N/2-1} \varphi_\nu(2q) = \sum_{q=0}^{N-1} \varphi_{\nu-1}(q) = 2^{\nu-1}.$$

Предложение доказано. □

4°. Предположим, что сигналы $\beta_2, \ldots, \beta_s$ получаются из β_1 с помощью прореживания:

$$\beta_{\nu+1}(k) = \beta_\nu(2k), \qquad k \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 2, \ldots, s.$$

Опираясь на формулу (12) и соотношение (см. [2])

$$\psi_\nu(2j) = \psi_{\nu-1}(j) + \psi_{\nu-1}\big(j + \tfrac{N}{2}\big),$$

можно доказать следующие равенства: при всех $\nu \in 1 : s$

$$\sum_{q=0}^{N/2-1} \psi_\nu(2q) = 0, \qquad \sum_{q=0}^{N/2-1} \psi_\nu(2q+1) = 0.$$

Обоснование полностью аналогично доказательству предложения 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Селянинова Н. А. *Прямая лифтинговая схема* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 26 апреля 2005 г. (`http://dha.spb.ru/reps05.shtml#0426`).

2. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Параметрические лифтинговые схемы вейвлетных разложений* // Проблемы матем. анализа. Вып. 42. 2009. С. 15–41.