ЦИКЛИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ФРЕЙМА МЕРСЕДЕС-БЕНЦ*

В. Н. Малозёмов Н. А. Соловьёва

malv@math.spbu.ru vinyo@mail.ru

12 сентября 2009 г.

1°. Следуя [1], рассмотрим *матрицу Мерседес-Бенц* B_n порядка $n\times(n+1)$. Она определяется рекуррентно:

$$B_1 = [-1, 1];$$

$$B_k = \begin{bmatrix} & 0 \\ \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\, B_{k-1} & \vdots \\ & 0 \\ -\frac{1}{k}, \dots, -\frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix}, \qquad k = 2, \dots, n. \tag{1}$$

В частности,

$$B_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Для матрицы Мерседес-Бенц B_n справедливо равенство

$$B_n\, B_n^T = \bigl(1 + \tfrac{1}{n}\bigr) I_n\,, \tag{2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Столбцы $b_1^n, \dots, b_n^n, b_{n+1}^n$ матрицы B_n образуют *фрейм Мерседес-Бенц*. Векторы b_j^n — единичные и обладают следующими свойствами

$$\sum_{j=1}^{n+1} b_j^n = \mathbb{O}; \qquad \langle b_i^n, b_j^n\rangle = -\tfrac{1}{n} \quad \text{при } \ i \neq j. \tag{3}$$

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Введём квадратную матрицу P_n порядка n с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} &P_1 = [-1]; \\ &P_k = \begin{bmatrix} p_1^{k-1}, & \ldots, & p_{k-2}^{k-1}, & \frac{1}{k}\, p_{k-1}^{k-1}, & \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\, p_{k-1}^{k-1} \\ 0, & \ldots, & 0, & \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}, & -\frac{1}{k} \end{bmatrix}, \quad k = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4}$$

где p_j^{k-1} — j-й столбец матрицы P_{k-1}. В частности,

$$P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad P_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы формулы*

$$P_n\, b_j^n = b_{j+1}^n\,, \quad j \in 1:n; \qquad P_n\, b_{n+1}^n = b_1^n. \tag{5}$$

Именно это имеется в виду под циклическим свойством фрейма Мерседес-Бенц.

2°. При $n = 1$ теорема очевидна. Общий случай $n \geqslant 2$ требует некоторой подготовки.

Обозначим через U_n и V_n квадратные матрицы порядка n, состоящие из столбцов $b_1^n, \ldots, b_n^n$ и $b_2^n, \ldots, b_{n+1}^n$ соответственно. Тогда первое равенство в (5) можно переписать в виде

$$P_n\, U_n = V_n\,. \tag{6}$$

ЛЕММА. *При $n \geqslant 2$ матрица U_n обратима, причём*

$$U_n^{-1} = \begin{bmatrix} & -1 \\ \frac{n-1}{\sqrt{n^2-1}}\, B_{n-1}^T & \vdots \\ & -1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (1)

$$U_n = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, B_{n-1} \\ -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$D_n := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, B_{n-1} \\ -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & -1 \\ \frac{n-1}{\sqrt{n^2-1}}\, B_{n-1}^T & \vdots \\ & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n}\, B_{n-1} B_{n-1}^T & h \\ g^T & 1 \end{bmatrix},$$

где g и h — вектор-столбцы порядка $n-1$. По свойству (2)

$$\tfrac{n-1}{n}\, B_{n-1}\, B_{n-1}^T = I_{n-1}\,.$$

По свойству (3)

$$h = -\tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} \sum_{j=1}^{n} b_j^{n-1} = \mathbb{O}\,,$$

$$g = -\tfrac{n-1}{n\sqrt{n^2-1}} \sum_{j=1}^{n} b_j^{n-1} = \mathbb{O}\,.$$

Значит, $D_n = I_n$, что равносильно (7). $\square$

На основании (6) и леммы получаем явное представление для матрицы P_n:

$$P_n = V_n\, U_n^{-1}. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$P_n\, b_{n+1}^n = V_n\, U_n^{-1}\, b_{n+1}^n = -\sum_{j=2}^{n+1} b_j^n = b_1^n\,. \tag{9}$$

Осталось проверить, что матрица P_n, определяемая формулой (8), удовлетворяет рекуррентному соотношению (4) при $k=n$.

При $n=2$ это проверяется непосредственно. В дальнейшем будем считать, что $n \geqslant 3$.

3°. Согласно (9) и (1)

$$p_n^n = b_1^n = \begin{bmatrix} \tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, b_1^{n-1} \\ -\tfrac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, p_{n-1}^{n-1} \\ -\tfrac{1}{n} \end{bmatrix},$$

что соответствует равенству последних столбцов в (4) (при $k=n$).

Разберёмся с предпоследними столбцами. Имеем

$$p_{n-1}^n = \tfrac{n-1}{\sqrt{n^2-1}} \Big(-\tfrac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n} b_j^n + b_{n+1}^n \Big) = \tfrac{n-1}{\sqrt{n^2-1}} \Big(\tfrac{1}{n-1}\big(b_1^n + b_{n+1}^n\big) + b_{n+1}^n \Big) =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} \big(b_1^n + n\, b_{n+1}^n\big) = \tfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} \left(\begin{bmatrix} \tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, b_1^{n-1} \\ -\tfrac{1}{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{n}\, p_{n-1}^{n-1} \\ \tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} \end{bmatrix},$$

что соответствует равенству предпоследних столбцов в (4).

Рассмотрим столбцы с индексами $k \in 1 : n-2$. На основании (8) и (1) запишем

$$p_k^n = \tfrac{n-1}{\sqrt{n^2-1}} \sum_{j=1}^{n} b_{j+1}^n \, b_j^{n-1}(k) = \tfrac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^{n-1}(k) \begin{bmatrix} b_{j+1}^{n-1} \\ -\frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Мы воспользовались тем, что $b_n^{n-1}(k) = 0$ при $k \in 1 : n-2$. Имеем

$$p_k^n(n) = -\tfrac{n-1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^{n-1}(k) = \tfrac{n-1}{n^2} \, b_n^{n-1}(k) = 0.$$

Обозначим

$$g_k^{n-1} = \tfrac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^{n-1}(k) \, b_{j+1}^{n-1} \,. \tag{10}$$

Тогда

$$p_k^n = \begin{bmatrix} g_k^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k \in 1 : n-2.$$

Покажем, что $g_k^{n-1} = p_k^{n-1}$. Этим завершится доказательство теоремы.

В силу (5) и (2)

$$b_{j+1}^{n-1} = P_{n-1} \, b_j^{n-1}\,; \quad j \in 1 : n-1; \tag{11}$$

$$\tfrac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} b_j^{n-1} \, b_j^{n-1}(k) = e_k^{n-1}\,,$$

где e_k^{n-1} — k-й орт в $\mathbb{R}^{n-1}$. В последней сумме слагаемое, соответствующее $j = n$, при всех $k \in 1 : n-2$ равно нулю, поэтому

$$\tfrac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^{n-1}(k) \, b_j^{n-1} = e_k^{n-1}\,, \qquad k \in 1 : n-2. \tag{12}$$

На основании (10), (11) и (12) при $k \in 1 : n-2$ получаем

$$g_k^{n-1} = \tfrac{n-1}{n} \, P_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} b_j^{n-1}(k) \, b_j^{n-1} = P_{n-1} \, e_k^{n-1} = p_k^{n-1}\,.$$

Теорема доказана. $\square$

4°. Выясним свойства матрицы P_n при $n \geqslant 2$.

ТЕОРЕМА 2. *Матрица* P_n *— ортогональная. Её собственными числами являются* $\omega_{n+1}^1, \omega_{n+1}^2, \ldots, \omega_{n+1}^n$, *где* $\omega_{n+1} = \exp(\frac{2\pi i}{n+1})$.

Доказательство. Ортогональность матрицы P_2 проверяется непосредственно. Предположим, что матрица P_{n-1} ортогональна, то есть

$$\langle p_k^{n-1}, p_s^{n-1} \rangle = \delta_{ks}\,, \qquad k, s \in 1 : n-1,$$

где $\delta_{ks} = 1$ при $k = s$ и $\delta_{ks} = 0$ при $k \neq s$. Легко проверить, опираясь на рекуррентное соотношение (4) при $k = n$, что

$$\langle p_k^n, p_s^n \rangle = \delta_{ks}\,, \qquad k, s \in 1 : n.$$

Значит, матрица P_n также ортогональна.

Система векторов $b_1^n, \ldots, b_{n+1}^n$ в силу (2) является жёстким фреймом. Если учесть, что $b_j^n = P_n^{j-1} b_1^n$ при $j = 2, \ldots, n+1$, где P_n — ортогональная матрица, то, как показано в [2], существует число c, $|c| = 1$, такое, что $P_n^{n+1} = c I_n$; при этом собственные числа матрицы P_n суть попарно различные корни степени $n+1$ из c. Согласно (5) справедливо равенство $P_n b_{n+1}^n = b_1^n$ или $P_n^{n+1} b_1^n = b_1^n$ или $c b_1^n = b_1^n$. Отсюда следует, что $c = 1$. Таким образом, собственными числами матрицы P_n являются n попарно различных чисел из множества $\{1, \omega_{n+1}, \omega_{n+1}^2, \ldots, \omega_{n+1}^n\}$. Осталось проверить, что число $\lambda = 1$ не будет собственным числом для матрицы P_n.

При $n = 2$ это устанавливается непосредственно. Предположение о том, что $\lambda = 1$ не есть собственное число матрицы P_{n-1} означает, что столбцы матрицы $P_{n-1} - I_{n-1}$ линейно независимы. Покажем, что столбцы матрицы $P_n - I_n$ также линейно независимы. Этим завершится доказательство теоремы.

Составим линейную комбинацию столбцов матрицы $P_n - I_n$ и приравняем её нулю. Согласно (4) запишем

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n-2} c_k \bigl(p_k^{n-1} - e_k^{n-1}\bigr) + c_{n-1}\bigl(\tfrac{1}{n}\, p_{n-1}^{n-1} - e_{n-1}^{n-1}\bigr) + c_n\, \tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, p_{n-1}^{n-1} = \mathbb{O}, \\ c_{n-1}\, \tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} - c_n\bigl(1 + \tfrac{1}{n}\bigr) = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Предположим, что $c_n \neq 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $c_n = 1$. Тогда $c_{n-1} = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$. Подставим эти значения в первую группу уравнений системы (13). Учитывая, что

$$\tfrac{1}{n}\sqrt{\tfrac{n+1}{n-1}} + \tfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \tfrac{\sqrt{n+1}}{n}\Bigl(\tfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \sqrt{n-1}\Bigr) = \sqrt{\tfrac{n+1}{n-1}}\,,$$

получаем
$$\sum_{k=1}^{n-2} c_k\bigl(p_k^{n-1} - e_k^{n-1}\bigr) + \sqrt{\tfrac{n+1}{n-1}}\bigl(p_{n-1}^{n-1} - e_{n-1}^{n-1}\bigr) = \mathbb{O}.$$
Но это противоречит линейной независимости столбцов матрицы $P_{n-1} - I_{n-1}$. Значит, $c_n = 0$. Тогда и $c_{n-1} = 0$. Остаётся
$$\sum_{k=1}^{n-2} c_k\bigl(p_k^{n-1} - e_k^{n-1}\bigr) = \mathbb{O}.$$
Из линейной независимости столбцов матрицы $P_{n-1} - I_{n-1}$ следует, что $c_1 = \cdots = c_{n-2} = 0$. Установлено, что столбцы матрицы $P_n - I_n$ линейно независимы. Теорема доказана. $\square$

5°. К вопросу о циклическом свойстве фрейма Мерседес-Бенц можно подойти иначе. В силу (3) и нормированности векторов b_j^n справедливо соотношение
$$\langle b_i^n, b_j^n\rangle = \langle b_{i+1}^n, b_{j+1}^n\rangle, \qquad i, j \in 1 : n+1,$$
где $b_{n+2}^n = b_1^n$. В этом случае, как показано в [3], существует ортогональная матрица P_n, такая, что $b_j^n = P_n^{j-1} b_1^n$, $j \in 2 : n+1$; при этом собственные числа матрицы P_n суть попарно различные корни степени $n+1$ из единицы. Согласно (8) матрица P_n определяется единственным образом.

В подходе, принятом в статье, указывается исключительно простое рекуррентное соотношение для матрицы P_n, которое, в частности, позволяет установить, что число $\lambda = 1$ не является собственным для P_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы матем. анализа. 2009. Вып. 39. С. 3–25.

2. Соловьёва Н. А. *Обобщённые гармонические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 16 апреля 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0416`).

3. Малозёмов В. Н. *Циклические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 января 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0121`).