ЗАМЕЧАНИЕ О СИСТЕМАХ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ*

А. Н. Сабаев

16 сентября 2008 г.

Напомним [1], что системой Мерседес-Бенц в $\mathbb{R}^n$ называется система, состоящая из $n+1$ единичных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$, таких, что

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = -\tfrac{1}{n} \quad \text{при } \; k \neq j\,.$$

Желая обобщить это понятие, введём следующее определение.

Система единичных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *из* $\mathbb{R}^n$ *при* $m \geqslant n+1$ *называется системой Мерседес-Бенц, если*

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = c \quad \textit{при} \;\; k \neq j\,, \tag{1}$$

где $c \neq 1$.

При $c = 1$ равенство (1) можно переписать в виде

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \|\varphi_k\| \cdot \|\varphi_j\| \quad \text{при} \;\; k \neq j\,.$$

Отсюда следует, что все векторы φ_k равны между собой, а это — неинтересный случай.

В [2] в определение системы Мерседес-Бенц входило ещё условие фреймовости системы $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$. Мы исключили это условие. Тем не менее, результат, установленный в [2], остаётся верным.

ТЕОРЕМА. *При* $n \geqslant 2$ *и* $m > n+1$ *систем Мерседес-Бенц не существует.*

Доказательство проведём от противного. Предположим, что при некоторых $n \geqslant 2$ и $m > n+1$ существует система Мерседес-Бенц $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$. Обозначим через Φ матрицу со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Поскольку столбцы матрицы Φ линейно зависимы, то найдётся ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^m$, такой, что $\Phi\, a = \mathbb{O}$. Умножив на Φ^T слева, получим $\Phi^T \Phi\, a = \mathbb{O}$. Это значит, что система

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

линейных уравнений $\Phi^T\Phi\, x = \mathbb{O}$ с квадратной матрицей $\Phi^T\Phi$ порядка m имеет нетривиальное решение.

Определитель матрицы $\Phi^T\Phi$ необходимо равен нулю. Запишем этот определитель. В силу (1)

$$\det(\Phi^T\Phi) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & c & c & \ldots & c \\ c & 1 & c & \ldots & c \\ c & c & 1 & \ldots & c \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ c & c & c & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Добавим к первому столбцу все остальные столбцы, после чего вычтем первую строку из всех остальных строк. Получим

$$\det(\Phi^T\Phi) = \begin{vmatrix} 1+(m-1)\,c & c & c & \ldots & c \\ 0 & 1-c & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-c \end{vmatrix} = \bigl[1+(m-1)\,c\bigr](1-c)^{m-1}.$$

По определению системы Мерседес-Бенц $c \neq 1$, поэтому $\det(\Phi^T\Phi) = 0$ только при $c = -\frac{1}{m-1}$.

Теперь обозначим через Φ_0 матрицу со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$. Её столбцы тоже линейно зависимы. Аналогично предыдущему придём к равенству $\det(\Phi_0^T\Phi_0) = 0$, которое возможно только при $c = -\frac{1}{n}$. Значит, величина c, входящая в определение системы Мерседес-Бенц $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, должна одновременно равняться и $-\frac{1}{m-1}$ и $-\frac{1}{n}$, что при $m > n+1$ невозможно.

Теорема доказана. $\square$

При $m = n+1$ системы Мерседес-Бенц существуют. Их полное описание дано в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Системы Мерседес-Бенц и жёсткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 февраля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0228`).

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Систем Мерседес-Бенц при* $m > n+1$ *не существует* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 13 февраля 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0213`).