СИСТЕМ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ ПРИ $m > n + 1$ НЕ СУЩЕСТВУЕТ*

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

13 февраля 2008 г.

Напомним [1], что система единичных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ из $\mathbb{R}^n$ при $m = n+1$ является жёстким фреймом тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\bigl|\langle\varphi_k, \varphi_s\rangle\bigr| = \tfrac{1}{n} \quad \text{при } k \neq s.$$

Если $\langle\varphi_k, \varphi_s\rangle = -\frac{1}{n}$ при $k \neq s$, то такой жёсткий фрейм называется системой Мерседес-Бенц [2].

Попытка обобщить понятие системы Мерседес-Бенц приводит к следующему определению: *набор единичных векторов* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *из* $\mathbb{R}^n$ *при* $m \geqslant n+1$ *называется системой Мерседес-Бенц, если*

(i) *этот набор является жёстким фреймом,*

(ii) $\langle\varphi_k, \varphi_s\rangle = c$ *при* $k \neq s$, *где* c *— фиксированное число,* $c \neq 0$.

Оказывается, что случай $m = n + 1$ — уникальный.

ТЕОРЕМА. *При* $n \geqslant 2$ *и* $m > n + 1$ *систем Мерседес-Бенц не существует.*

Доказательство проведём от противного. Допустим, что существует набор единичных n-мерных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, удовлетворяющий условиям (i), (ii). Обозначим через $\varPhi$ матрицу со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. В силу (i)

$$\varPhi \varPhi^T = \tfrac{m}{n}\, I_n. \tag{1}$$

Как известно (см., например, [3]), симметричные матрицы $\varPhi\varPhi^T$ и $\varPhi^T\varPhi$ порядков n и m соответственно имеют одинаковый набор ненулевых собственных

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

чисел. Согласно (1) у матрицы $\Phi\Phi^T$ одно собственное число $\lambda_1 = m/n$ кратности n. Значит, у матрицы $\Phi^T\Phi$ два собственных числа: $\lambda_1 = m/n$ кратности n и $\lambda_2 = 0$ кратности $m - n$. Учитывая условия $n \geqslant 2$, $m > n + 1$, приходим к следующему выводу: матрица $\Phi^T\Phi$ имеет два различных собственных числа, кратности которых не меньше двух.

Теперь отметим, что в силу (ii) матрица $\Phi^T\Phi$ имеет простую структуру: у неё на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны c. У такой матрицы два собственных числа: $\lambda_1' = 1 - c$ кратности $m - 1$ и $\lambda_2' = 1 + (m-1)\,c$ кратности один. Чтобы пояснить это, запишем матрицу $\Phi^T\Phi$ и матрицу P, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $\Phi^T\Phi$, при $m = 4$:

$$\Phi^T\Phi = \begin{bmatrix} 1 & c & c & c \\ c & 1 & c & c \\ c & c & 1 & c \\ c & c & c & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $c \neq 0$, то $\lambda_1' \neq \lambda_2'$. Значит, матрица $\Phi^T\Phi$ имеет два различных собственных числа, причём кратность одного из них равна единице. Это противоречит выводу, сделанному ранее.

Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. При $m = n+1$ противоречия не будет. Два способа нахождения собственных чисел матрицы $\Phi^T\Phi$ приводят к одинаковому результату: у матрицы $\Phi^T\Phi$ два собственных числа $\lambda_1 = 1 + \frac{1}{n}$ кратности n и $\lambda_2 = 0$ кратности один. При этом $c = -\frac{1}{n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Четвёртое определение жёсткого фрейма* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 мая 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0530`).

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Системы Мерседес-Бенц и жёсткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 февраля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0228`).

3. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Об унитарных матрицах и сингулярных разложениях* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 января 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0130`).