МАКСИМАЛЬНАЯ ИЗБЫТОЧНОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФРЕЙМОВ*

А. Б. Певный

pevnyi@syktsu.ru

28 марта 2007 г.

Излагаются основные сведения о комплексных гармонических фреймах по статье V. K. Goyal, J. Kovačevič, J. A. Kelner [1].

1°. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{C}^n$ называется *фреймом*, если существуют числа $A, B > 0$, такие, что

$$A\,\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \bigl|\langle x, \varphi_i\rangle\bigr|^2 \leqslant B\,\|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Справедливо следующее простое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Система Φ является фреймом в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда линейная оболочка системы Φ совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^n$:*

$$\mathcal{L}(\Phi) = \mathbb{C}^n. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть выполнено (2). Введём обозначение

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{m} \bigl|\langle x, \varphi_i\rangle\bigr|^2.$$

Нужно доказать, что $Q(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq \mathbb{O}$. Допустим противное: существует вектор $x_0 \neq \mathbb{O}$, такой, что $Q(x_0) = 0$. Тогда

$$\langle x_0, \varphi_i\rangle = 0, \qquad i \in 1:m\,.$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

В силу (2) вектор x_0 разлагается по системе Φ:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \varphi_i \, .$$

Отсюда

$$\|x_0\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \overline{c}_i \, \langle x_0, \varphi_i \rangle = 0,$$

что противоречит условию $x_0 \neq \mathbb{O}$.

Пусть выполнены неравенства (1). Допустим, что $\mathcal{L}(\Phi) \neq \mathbb{C}^n$. Тогда существует вектор $x_0 \neq \mathbb{O}$, ортогональный ко всем элементам из $\mathcal{L}(\Phi)$. В частности, $\langle x_0, \varphi_i \rangle = 0$, $i \in 1 : m$. Приходим к равенству $Q(x_0) = 0$, которое противоречит (1). $\square$

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого фрейма $m \geqslant n$.*

2°. Избыточность фрейма. По фреймовым коэффициентам $c_i = \langle x, \varphi_i \rangle$, $i \in 1 : m$, сигнал x можно восстановить:

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \widetilde{\varphi}_i \, ,$$

где $\{\widetilde{\varphi}_i\}_{i=1}^m$ — канонический двойственный фрейм (см. [2]).

Допустим, что $m > n$. Для передачи сигнала x по каналам связи часто передаются коэффициенты $\{c_i\}$. Допустим, часть этих коэффициентов при передаче потерялась. Может оказаться, что по оставшимся коэффициентам сигнал x восстановить всё-таки можно.

Будем говорить не об утрате коэффициентов, а об исключении части элементов из фрейма. Мы интересуемся вопросом, когда при таком исключении фрейм останется фреймом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Избыточностью* фрейма $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{C}^n$ называется такое число r, что при удалении любых r элементов фрейм остаётся фреймом, и существует подсистема из $r + 1$ векторов, при удалении которой фрейм перестаёт быть фреймом.

Очевидно, что $r \leqslant m - n$. Действительно, если удалить больше, чем $m - n$ векторов, то останется меньше n векторов, а они по предложению 1 не образуют фрейм.

3°. Примером фреймов с максимальной избыточностью ($r = m - n$) являются гармонические фреймы. Для того чтобы ввести их, зафиксируем натуральные числа m, n, где $m > n > 1$. Обозначим $\omega_m = e^{2\pi i/m}$ — корень m-й степени из единицы. Рассмотрим систему векторов $\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ из $\mathbb{C}^n$ с компонентами

$$\varphi_k(j) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega_m^{kj}\,, \qquad k \in 0 : m-1, \quad j \in 0 : n-1.$$

Очевидно, что

$$\|\varphi_k\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\bigl|\omega_m^{kj}\bigr|^2 = 1, \qquad k \in 0 : m-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является жёстким фреймом в $\mathbb{C}^n$ с константой фрейма $A = \frac{m}{n}$.*

Доказательство. Разложим вектор $x \in \mathbb{C}^n$ по системе $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$. Для этого удлинним x, добавив $m - n$ нулевых компонент. Получим вектор $\widetilde{x} = \bigl(x(0), \ldots, x(n-1), 0, \ldots, 0\bigr) \in \mathbb{C}^m$. Рассмотрим ДПФ от вектора $\widetilde{x}$:

$$\begin{aligned} C(k) = \bigl(\mathcal{F}_m(\widetilde{x})\bigr)(k) := \sum_{j=0}^{n-1} x(j)\,\omega_m^{-kj} = \sqrt{n}\sum_{j=0}^{n-1} x(j)\,\overline{\varphi_k(j)} = \\ = \sqrt{n}\langle x, \varphi_k\rangle, \qquad k \in 0 : m-1. \end{aligned}$$

По формуле обращения ДПФ

$$x(j) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} C(k)\,\omega_m^{kj} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sqrt{n}\,\langle x, \varphi_k\rangle\sqrt{n}\,\varphi_k(j), \qquad j \in 0 : n-1,$$

или, в векторной форме записи,

$$x = \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\langle x, \varphi_k\rangle\,\varphi_k\,, \qquad x \in \mathbb{C}^n.$$

Это разложение гарантирует, что система $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ является жёстким фреймом с константой $A = \frac{m}{n}$. □

Введённый фрейм $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ называется *гармоническим фреймом.*

4°. Избыточность гармонического фрейма.

ТЕОРЕМА. *Избыточность гармонического фрейма равна $m - n$.*

Доказательство. Удалим $m - n$ векторов, останется n векторов. Таким образом, нужно доказать, что при выборе любых n векторов из системы $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ получается фрейм.

Возьмём произвольное подмножество $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subset \{0, 1, \ldots, m-1\}$, где $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leqslant m-1$. Подсистема $\{\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, \ldots, \varphi_{k_n}\}$ будет фреймом в $\mathbb{C}^n$, если она линейно независима, а это будет только тогда, когда определитель, составленный из строк $\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, \ldots, \varphi_{k_n}$, отличен от нуля.

Рассмотрим матрицу

$$\Phi_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & \omega_m^{k_1} & \omega_m^{2k_1} & \ldots & \omega_m^{(n-1)k_1} \\ 1 & \omega_m^{k_2} & \omega_m^{2k_2} & \ldots & \omega_m^{(n-1)k_2} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & \omega_m^{k_n} & \omega_m^{2k_n} & \ldots & \omega_m^{(n-1)k_n} \end{bmatrix}.$$

С точностью до множителя $\frac{1}{\sqrt{n}}$ это матрица Вандермонда, поэтому для её определителя справедлива формула

$$\det \Phi_{n,n} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \prod_{i>j} (\omega_m^{k_i} - \omega_m^{k_j}).$$

Так как числа $\omega_m^{k_i}$, $i \in 1 : n$, попарно различны, то $\det \Phi_{n,n} \neq 0$.

Значит, система $\{\varphi_{k_i}\}_{i=1}^n$ является фреймом. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Goyal V. K., Kovačevič J., Kelner J. A. *Quantized frame expansions with erasures* // Applied and computational harmonic analysis. 2001. V. 10. P. 203–233.

2. Певный А. Б. *Фреймы в конечномерных пространствах и задача минимизации фреймового потенциала* // Секция «Дискретный гармонический анализ». Избранные доклады. 28 марта 2006 г.

   `http://dha.spb.ru/reps06.shtml#0328`