# СИММЕТРИЧНОСТЬ МАТРИЦ PONS*

И. А. Крепкий С. М. Машарский

feb418@gmail.com smash@scientist.com

18 мая 2013 г.

**1**°. Матрицы PONS введены в работе [1]. Это рекуррентная последовательность квадратных матриц $P_1, P_2, \ldots$, каждая из которых имеет вдвое больший порядок, чем предыдущая. Начинается последовательность с матрицы Адамара

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для перехода от матрицы $P_{n-1}$ к $P_n$ строки исходной матрицы разбиваются на пары и каждые *две* строки матрицы $P_{n-1}$ порождают *четыре* строки матрицы $P_n$ вдвое большей длины по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} \ldots \\ A \\ B \\ \ldots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ A & B \\ A & -B \\ B & A \\ -B & A \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{1}$$

В частности,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

В докладе [2] в качестве гипотезы сформулирована, но не доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 1.** *При каждом $n = 1, 2, \ldots$ матрица $P_n$ симметрична.*

Симметричность матриц $P_1$ и $P_2$ очевидна. Нетрудно проверить и симметричность матрицы $P_3$. Для доказательства общего случая потребуется некоторая подготовка.

**2**°. Квадратная матрица $P_n$ имеет порядок $2^n$. Представим индексы $k$, $j \in 0 : 2^n - 1$ элемента матрицы $P_n[k, j]$ в виде

$$k = 4m + m', \quad m \in 0 : 2^{n-2} - 1,\ m' \in 0 : 3;$$

$$j = l + 2^{n-1} l', \quad l \in 0 : 2^{n-1} - 1,\ l' \in 0 : 1.$$

Тогда соотношение (1) можно представить в виде набора равенств

$$\begin{aligned}
&P_n[4m, l] &&= P_{n-1}[2m, l],\\
&P_n[4m, l + 2^{n-1}] &&= P_{n-1}[2m + 1, l],\\
&P_n[4m + 1, l] &&= P_{n-1}[2m, l],\\
&P_n[4m + 1, l + 2^{n-1}] &&= -P_{n-1}[2m + 1, l],\\
&P_n[4m + 2, l] &&= P_{n-1}[2m + 1, l],\\
&P_n[4m + 2, l + 2^{n-1}] &&= P_{n-1}[2m, l],\\
&P_n[4m + 3, l] &&= P_{n-1}[2m + 1, l],\\
&P_n[4m + 3, l + 2^{n-1}] &&= -P_{n-1}[2m, l],\\
&\quad m \in 0 : 2^{n-2} - 1, \quad l \in 0 : 2^{n-1} - 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Формулы (2) можно компактно записать одной строкой, если воспользоваться представлением индексов в двоичном коде

$$k = (k_{n-1}, \ldots, k_0)_2, \quad j = (j_{n-1}, \ldots, j_0)_2, \quad k_\nu, j_\nu \in 0 : 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&P_n[(k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1, k_0)_2, (j_{n-1}, j_{n-2}, \ldots, j_0)_2] = \\
&\qquad = (-1)^{k_0(k_1 + j_{n-1})} P_{n-1}[(k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 \oplus j_{n-1})_2, (j_{n-2}, \ldots, j_0)_2],
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\oplus$ — операция сложения по модулю 2.

**3°**. С помощью двоичных кодов также можно записать явный вид для элементов матрицы $P_n$. Очевидно, что

$$P_1[k,j] = P_1[(k_0)_2,(j_0)_2] = (-1)^{k_0 j_0}. \tag{4}$$

Чуть менее очевидно, что

$$P_2[k,j] = P_1[(k_1,k_0)_2,(j_1,j_0)_2] = (-1)^{(k_0+j_0)(k_1+j_1)}. \tag{5}$$

Ответ на вопрос, как же выглядит формула для элемента $P_n[k,j]$ в общем виде, дает следующая лемма.

**ЛЕММА 1.** *При каждом $n = 1,2,\ldots$ справедлива формула*

$$P_n[k,j] = \prod_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{(k_\nu+j_{n-\nu})(k_{\nu+1}+j_{n-1-\nu})}\,, \tag{6}$$

*где для удобства положено $k_n = j_n := 0$.*

Доказательство. Будем доказывать справедливость равенства (6) индукцией по $n$. При $n=1$ и $n=2$ равенство (6) совпадает с (4) и (5) соответственно. Сделаем индукционный переход от $n-1$ к $n$, $n \geqslant 3$.

Зафиксируем индексы $k,j \in 0:2^n-1$, $k=(k_{n-1},\ldots,k_0)_2$, $j=(j_{n-1},\ldots,j_0)_2$. Положим

$$k'_0 := k_1 \oplus j_{n-1},$$

$$k'_\nu := k_{\nu+1}, \quad \nu \in 1:n-1;$$

$$j'_\nu := j_\nu, \quad \nu \in 0:n-2,$$

$$j'_{n-1} := 0.$$

С учетом этих обозначений и индукционного предположения правую часть равенства (3) можно переписать в виде

$$(-1)^{k_0(k_1+j_{n-1})}P_{n-1}[(k'_{n-2},\ldots,k'_1,k'_0)_2,(j'_{n-2},\ldots,j'_0)_2] =$$

$$= (-1)^{k_0(k_1+j_{n-1})}\prod_{\nu=0}^{n-2}(-1)^{(k'_\nu+j'_{n-1-\nu})(k'_{\nu+1}+j'_{n-2-\nu})} =$$

$$= (-1)^{k_0(k_1+j_{n-1})}(-1)^{(k_1\oplus j_{n-1})(k_2+j_{n-2})}\prod_{\nu=1}^{n-2}(-1)^{(k_{\nu+1}+j_{n-1-\nu})(k_{\nu+2}+j_{n-2-\nu})}.$$

Подставляя это в формулу (3) и замечая, что $(-1)^{a\oplus b} = (-1)^{a+b}$, получаем:

$$P_n[k,j] = (-1)^{(k_0+j_n)(k_1+j_{n-1})}(-1)^{(k_1+j_{n-1})(k_2+j_{n-2})}\prod_{\nu'=2}^{n-1}(-1)^{(k_{\nu'}+j_{n-\nu'})(k_{\nu'+1}+j_{n-1-\nu'})},$$

что равносильно (6).

Лемма доказана. $\square$

**4**°. Обратимся к доказательству теоремы. По существу, нужно проверить, что при каждом $n = 1, 2, \ldots$ выполняются равенства

$$P_n[k, j] = P_n[j, k], \quad k, j \in 0 : 2^n - 1.$$

С помощью формулы (6) это проверяется непосредственно. Имеем

$$P_n[j, k] = \prod_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{(j_\nu + k_{n-\nu})(j_{\nu+1} + k_{n-1-\nu})} =$$

$$= \prod_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{(j_{n-1-\mu} + k_{\mu+1})(j_{n-\mu} + k_\mu)} = P_n[k, j].$$

Теорема доказана. $\square$

**5**°. Пусть $N = 2^n$. Обозначим $k$-ю строку матрицы $P_n$ символом $p_k$ и будем ее рассматривать как сигнал из пространства $\mathbb{C}_N$, заданный на основном периоде:

$$p_k(j) = P_n[k, j], \quad j \in 0 : N - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

В докладе [2] сформулирована еще одна гипотеза, которую мы представим здесь как теорему.

**ТЕОРЕМА 2.** *При всех $n \geqslant 2$ и $k, k' \in 0 : \frac{N}{2} - 1$ справедливо соотношение*

$$p_k(j) p_{k'}(j) = \alpha^n_{k,k'}\, p_{\frac{N}{2}+k}(j) p_{\frac{N}{2}+k'}(j), \quad j \in 0 : N - 1, \tag{7}$$

*где*

$$\alpha^n_{k,k'} = (-1)^{k_{n-2} + k'_{n-2}}.$$

При $n = 2$ формула (7) принимает вид

$$p_k(j) p_{k'}(j) = (-1)^{k+k'}\, p_{k+1}(j) p_{k'+1}(j), \quad j \in 0 : 3, \quad k, k' \in 0 : 1.$$

В справедливости этого равенства можно убедиться непосредственно.

Доказательство теоремы при $n \geqslant 3$ вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

**ЛЕММА 2.** *При всех $n \geqslant 3$ и $k \in 0 : \frac{N}{2} - 1$ справедливо равенство*

$$p_k(j) = (-1)^{(k_{n-2} + j_2 + j_0)} p_{\frac{N}{2}+k}(j), \quad j \in 0 : N - 1. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем формулу (6), выделив из произведения два последних сомножителя:

$$P_n[k,j] = (-1)^{(k_{n-1}+j_1)j_0}(-1)^{(k_{n-2}+j_2)(k_{n-1}+j_1)}\prod_{\nu=0}^{n-3}(-1)^{(k_\nu+j_{n-\nu})(k_{\nu+1}+j_{n-1-\nu})} =$$
$$= (-1)^{(k_{n-1}+j_1)(k_{n-2}+j_2+j_0)}\varphi_k^n(j), \tag{9}$$

где для краткости обозначено

$$\varphi_k^n(j) = \prod_{\nu=0}^{n-3}(-1)^{(k_\nu+j_{n-\nu})(k_{\nu+1}+j_{n-1-\nu})}.$$

Зафиксируем $k \in 0 : \frac{N}{2}-1$, $k = (0, k_{n-2}, \ldots, k_0)_2$. Тогда двоичный код числа $\frac{N}{2}+k$ будет иметь вид $k = (1, k_{n-2}, \ldots, k_0)_2$. В соответствии с (9) имеем

$$p_k(j) = (-1)^{j_1(k_{n-2}+j_2+j_0)}\varphi_k^n(j),$$
$$p_{\frac{N}{2}+k}(j) = (-1)^{(j_1+1)(k_{n-2}+j_2+j_0)}\varphi_{\frac{N}{2}+k}^n(j).$$

Осталось заметить, что в определение $\varphi_k^n$ входят только младшие биты $k_0, k_1, \ldots, k_{n-2}$ числа $k$, так что $\varphi_{\frac{N}{2}+k}^n(j) \equiv \varphi_k^n(j)$. Справедливость равенства (8) установлена. $\square$

**6°**. Следствием из теоремы 1 является тот факт, что матрицы PONS можно формировать не по строкам, а по столбцам. По аналогии со схемой (1), для перехода от матрицы $P_{n-1}$ к $P_n$ столбцы исходной матрицы разбиваются на пары и каждые два столбца матрицы $P_{n-1}$ порождают четыре столбца матрицы $P_n$ вдвое большей высоты по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} \vdots & A & B & \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots & A & A & B & -B & \vdots \\ \vdots & B & -B & A & A & \vdots \end{pmatrix} \tag{10}$$

Схема (10) представляется более перспективной с точки зрения доказательства двух оставшихся гипотез, сформулированных в [2].

## ЛИТЕРАТУРА


1. An M., Byrnes J., Moran W., Saffari B., Shapiro H. S., Tolimieri R. *PONS, Reed-Muller codes, and group algebras* // NATO Advanced Study Institute: Computational Noncommutative Algebra and Applications. Tscany, Italy. July 2003. P. 155–197.

2. Стояноска И. С. *Обобщенные полиномы Шапиро и матрицы PONS* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 19 мая 2012 г. `http://dha.spb.ru/reps12.shtml#0519`