РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

17 июня 2011 г.

1°. Нормы сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ и его спектра Фурье $X = \mathcal{F}_N(x)$ связаны равенством Парсеваля [1, с. 31]

$$\|x\|^2 = \tfrac{1}{N}\|X\|^2. \tag{1}$$

Это равенство приводит к нетривиальным формулам для тригонометрических сумм в случае, когда удаётся явно вычислить компоненты спектра X.

ПРИМЕР 1. Пусть $N = 2n$ и

$$x(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 0 : n-1, \\ -1 & \text{при } j \in n : N-1. \end{cases}$$

Ясно, что $\|x\|^2 = N$. Как известно [1, с. 32],

$$X(k) = \begin{cases} 0 & \text{при чётных } k, \\ 2\bigl(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}\bigr) & \text{при нечётных } k, \end{cases}$$

так что

$$\|X\|^2 = 4\sum_{k=0}^{n-1} \bigl|1 - i \operatorname{ctg} \tfrac{\pi(2k+1)}{N}\bigr|^2 = 4\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi(2k+1)}{N}}.$$

На основании (1) приходим к формуле

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi(2k+1)}{2n}} = n^2.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

ПРИМЕР 2. Пусть $N = 2n+1$ и

$$x(j) = (-1)^j, \quad j \in 0 : N-1.$$

Ясно, что $\|x\|^2 = N$. Покажем, что

$$X(k) = 1 + i \operatorname{tg} \tfrac{\pi k}{N}, \quad k \in 0 : N-1. \tag{2}$$

По определению ДПФ имеем

$$X(k) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{2j}\, \omega_N^{-2kj} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{2j+1}\, \omega_N^{-k(2j+1)} =$$

$$= \omega_N^{-2kn} + (1 - \omega_N^{-k}) \sum_{j=0}^{n-1} \omega_N^{-2kj}.$$

В частности, $X(0) = 1$. При $k \in 1 : N-1$ получим

$$X(k) = \omega_N^{-2kn} + (1 - \omega_N^{-k}) \frac{1 - \omega_N^{-2kn}}{1 - \omega_N^{-2k}} = \omega_N^{-2kn} + \frac{1 - \omega_N^{-2kn}}{1 + \omega_N^{-k}} =$$

$$= \frac{\omega_N^{-k(2n+1)} + 1}{1 + \omega_N^{-k}} = \frac{2}{1 + \omega_N^{-k}}.$$

Вместе с тем,

$$\frac{1}{1 + \omega_N^{-k}} = \frac{1 + \omega_N^{k}}{(1 + \omega_N^{-k})(1 + \omega_N^{k})} = \frac{1 + \cos \frac{2\pi k}{N} + i \sin \frac{2\pi k}{N}}{2\bigl(1 + \cos \frac{2\pi k}{N}\bigr)} = \tfrac{1}{2}\bigl(1 + i \operatorname{tg} \tfrac{\pi k}{N}\bigr),$$

поэтому $X(k) = 1 + i \operatorname{tg} \frac{\pi k}{N}$ при $k \in 1 : N-1$. Равенство (2) установлено.

Из него следует, что

$$\|X\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \bigl|1 + i \operatorname{tg} \tfrac{\pi k}{N}\bigr|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi k}{N}}\ .$$

На основании (1) приходим к формуле

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi k}{2n+1}} = (2n+1)^2.$$

ПРИМЕР 3. Пусть $x(j) = j$, $j \in 0 : N-1$. Покажем, что

$$X(k) = \begin{cases} \ \ \frac{1}{2} N(N-1) & \text{при } k = 0, \\ -\frac{1}{2} N\bigl(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}\bigr) & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases} \tag{3}$$

Имеем

$$X(k)=\sum_{j=0}^{N-1} j\,\omega_N^{-kj}.$$

В частности, $X(0)=\frac{1}{2}N(N-1)$. При $k\in 1:N-1$

$$\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)\,\omega_N^{-kj}=X(k)+N\delta_N(k)=X(k).$$

Вместе с тем,

$$\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)\,\omega_N^{-kj}=\omega_N^k\sum_{j=1}^{N} j\,\omega_N^{-kj}=\omega_N^k\big(X(k)+N\big).$$

Приходим к уравнению $X(k)=\omega_N^k\big(X(k)+N\big)$, из которого следует, что

$$X(k)=\frac{N\omega_N^k}{1-\omega_N^k}=-\frac{N}{1-\omega_N^{-k}}=-\tfrac{1}{2}N\big(1-i\operatorname{ctg}\tfrac{\pi k}{N}\big),\quad k\in 1:N-1.$$

Равенство (3) установлено.

Вычислим квадраты норм сигнала x и его спектра X. Имеем

$$\|x\|^2=\sum_{j=1}^{N-1} j^2=\frac{(N-1)N(2N-1)}{6},$$

$$\|X\|^2=\tfrac{1}{4}N^2(N-1)^2+\tfrac{1}{4}N^2\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi k}{N}}.$$

На основании (1) получаем

$$\frac{(N-1)(2N-1)}{6}=\tfrac{1}{4}(N-1)^2+\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi k}{N}}.$$

После несложных преобразований приходим к замечательной формуле

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi k}{N}}=\frac{N^2-1}{3}. \tag{4}$$

2°. Пусть r — целое неотрицательное число. Напомним, что дискретная периодическая функция Бернулли порядка r определяется так [2, с. 5]:

$$b_r(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-r}\, \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

В частности,

$$b_0(j) = \delta_N(j) - \tfrac{1}{N}.$$

Из (5) следует, что

$$\big[\mathcal{F}_N(b_r)\big](k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ (\omega_N^k - 1)^{-r} & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases}$$

Условие $\big[\mathcal{F}_N(b_r)\big](0) = 0$ равносильно тому, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_r(j) = 0, \quad r = 0, 1, \ldots. \tag{6}$$

Далее

$$\big\|\mathcal{F}_N(b_r)\big\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{|\omega_N^k - 1|^{2r}}.$$

Учитывая, что

$$|\omega_N^k - 1|^2 = (\omega_N^k - 1)(\omega_N^{-k} - 1) = 2(1 - \cos\tfrac{2\pi k}{N}) = 4\sin^2\tfrac{\pi k}{N},$$

получаем

$$\big\|\mathcal{F}_N(b_r)\big\|^2 = \frac{1}{4^r} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2r}\frac{\pi k}{N}}.$$

На основании (1) приходим к формуле

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2r}\frac{\pi k}{N}} = 4^r N \|b_r\|^2, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

В частности, при $r = 1$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2\frac{\pi k}{N}} = 4N\|b_1\|^2. \tag{8}$$

Проверим, что правые части в (4) и (8) равны, т.е. что

$$\|b_1\|^2 = \frac{N^2-1}{12N}. \tag{9}$$

Как известно [2, с. 6], дискретные периодические функции Бернулли удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$b_{r+1}(j+1) - b_{r+1}(j) = b_r(j).$$

Вычислим с его помощью значения $b_1(j)$ при $j \in 1:N$. При $j \in 1:N-1$ имеем

$$b_1(j+1) - b_1(1) = \sum_{k=1}^{j} \big[b_1(k+1) - b_1(k)\big] = \sum_{k=1}^{j} b_0(k) = -j/N.$$

Обозначив $c = b_1(1)$, получим

$$b_1(j) = c - (j-1)/N, \quad j \in 2:N.$$

Это равенство верно и при $j = 1$. Константу c определим из условия (6),

$$\sum_{j=1}^{N} \big(c - (j-1)/N\big) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$c = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} (j-1) = \frac{N-1}{2N}.$$

Приходим к формуле

$$b_1(j) = \frac{N-1}{2N} - \frac{j-1}{N} = \frac{1}{N}\Big(\frac{N+1}{2} - j\Big), \quad j \in 1:N.$$

Теперь легко проверить равенство (9). Действительно,

$$\begin{aligned}\|b_1\|^2 &= \tfrac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \big(\tfrac{N+1}{2} - j\big)^2 = \tfrac{1}{N^2} \Big\{\tfrac{1}{4} N(N+1)^2 - (N+1)\sum_{j=1}^{N} j + \sum_{j=1}^{N} j^2 \Big\} = \\ &= \tfrac{1}{N^2}\big\{-\tfrac{1}{4}N(N+1)^2 + \tfrac{1}{6}N(N+1)(2N+1)\big\} = \\ &= \tfrac{N+1}{N}\big\{-\tfrac{1}{4}(N+1) + \tfrac{1}{6}(2N+1)\big\} = \tfrac{N^2-1}{12N}.\end{aligned}$$

По существу установлено, что формула (7) является обобщением формулы (4).

3°. Обозначим левую часть (7) через $S_r(N)$. В работе [3] показано, что $S_r(N)$ при натуральных r, N есть алгебраический полином степени r от N^2, делящийся на N^2-1 (см. (4)). Этот факт используется в [3] при выводе явных формул для $S_r(N)$.

Проверим, например, что

$$S_2(N) = \tfrac{1}{45}(N^2-1)(N^2+11). \tag{10}$$

Запишем

$$S_2(N) = (N^2-1)(AN^2+B). \tag{11}$$

Непосредственно вычислим значения $S_2(2)=1$, $S_2(3)=\frac{32}{9}$. Придём к системе линейных уравнений относительно A и B:

$$\begin{aligned} 3(4A+B) &= 1, \\ 8(9A+B) &= \tfrac{32}{9}. \end{aligned}$$

Найдём её решение: $A=\frac{1}{45}$, $B=\frac{11}{45}$. Подставив это в (11), получим (10).

4°. Напомним формулу для конечной разности r-го порядка сигнала x из $\mathbb{C}_N$:

$$\big[\Delta^r(x)\big](j) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\,C_r^s\,x(j+s).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *При всех натуральных r справедлива формула*

$$\tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\big(\sin^{2r}\tfrac{\pi k}{N}\big)\big|X(k)\big|^2 = \tfrac{1}{4^r}\big\|\Delta^r(x)\big\|^2. \tag{12}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
\big[\Delta^r(x)\big](j) &= \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\,C_r^s\Big\{\sum_{l=0}^{N-1}x(l)\,\delta_N(j+s-l)\Big\} = \\
&= \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\,C_r^s\Big\{\tfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}x(l)\sum_{k=0}^{N-1}\omega_N^{k(j+s-l)}\Big\} = \\
&= \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\omega_N^{kj}\sum_{l=0}^{N-1}x(l)\,\omega_N^{-kl}\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\,C_r^s\,\omega_N^{ks} = \\
&= \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\omega_N^{kj}\,X(k)(\omega_N^k-1)^r = \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\omega_N^k-1)^r\,X(k)\,\omega_N^{kj}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\big[\mathcal{F}_N\big(\Delta^r(x)\big)\big](k) = (\omega_N^k - 1)^r\, X(k).$$

В силу равенства Парсеваля (1)

$$\tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\omega_N^k - 1|^{2r}\big|X(k)\big|^2 = \big\|\Delta^r(x)\big\|^2.$$

Остаётся учесть, что (см. п. 2°)

$$|\omega_N^k - 1|^{2r} = \big|2\big(1-\cos\tfrac{2\pi k}{N}\big)\big|^r = 4^r \sin^{2r}\tfrac{\pi k}{N}.$$

Предложение доказано. □

Подставим в (12) $x = \delta_N$. Учитывая, что $\big[\mathcal{F}_N(\delta_N)\big](k) \equiv 1$, получаем

$$\tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2r}\tfrac{\pi k}{N} = \tfrac{1}{4^r}\big\|\Delta^r(\delta_N)\big\|^2. \tag{13}$$

Покажем, что

$$\frac{1}{4^r}\big\|\Delta^r(\delta_N)\big\|^2 = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}, \quad r \in 1:N-1. \tag{14}$$

При $r \in 1:N-1$ имеем

$$\big\|\Delta^r(\delta_N)\big\|^2 = \Big\langle \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\, C_r^s\, \delta_N(\cdot+s), \sum_{s'=0}^{r}(-1)^{r-s'}\, C_r^{s'}\, \delta_N(\cdot+s')\Big\rangle =$$
$$= \sum_{s,\, s'=0}^{r} (-1)^{s+s'}\, C_r^s\, C_r^{s'}\, \delta_N(s-s') = \sum_{s=0}^{r}(C_r^s)^2.$$

В тождестве $(1+x)^{2r} = (1+x)^r(1+x^r)$ сравним коэффициенты при x^r. Придём к равенству

$$C_{2r}^r = \sum_{s=0}^{r} C_r^{r-s}\, C_r^s = \sum_{s=0}^{r}(C_r^s)^2.$$

Таким образом,

$$\tfrac{1}{4^r}\big\|\Delta^r(\delta_N)\big\|^2 = \tfrac{1}{4^r}\sum_{s=0}^{r}(C_r^s)^2 = \tfrac{1}{4^r}C_r^{2r} =$$
$$= \frac{(2r)!}{4^r(r!)^2} = \frac{(2r)!}{\big[(2r)!!\big]^2} = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}.$$

Равенство (14) установлено.

Из (13) и (14) следует, что

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\sin^{2r}\frac{\pi k}{N}=\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!},\quad r\in 1:N-1. \tag{15}$$

В частности,

$$\tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\sin^2\tfrac{\pi k}{N}=\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin^4\tfrac{\pi k}{N}=\tfrac{3}{8}.$$

По условию $r\leqslant N-1$, так что первая формула верна при $N\geqslant 2$, а вторая — при $N\geqslant 3$.

5°. Как известно [4, с. 312],

$$\int_0^{\pi}\sin^{2r}x\,dx=\pi\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}.$$

На основании (15) при $N\geqslant r+1$ получаем

$$\tfrac{\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sin^{2r}\tfrac{\pi k}{N}=\int_0^{\pi}\sin^{2r}x\,dx.$$

Это значит, что при интегрировании функции $\sin^{2r}x$ по отрезку $[0,\pi]$ формула левых прямоугольников при $N\geqslant r+1$ точна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 1. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 100 с.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 3. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 88 с.

3. Беспалов М. С. *Представление для сумм чётных отрицательных степеней синусов в равностоящих узлах* // Известия вузов. Математика. 1996. Т.8 (441). С. 6–12.

4. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 864 с.