

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ БЕЗЬЕ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

Я. В. Петухова
ya.petukhova@mail.ru

28 апреля 2010 г.

Доклад представляет собой вариации на темы из статьи [1].

1°. Теория кривых Безье основана на свойствах алгебраических полиномов в форме Бернштейна [2]. В теории периодических кривых Безье аналогичную роль играют тригонометрические полиномы в форме Валле-Пуссена. Напомним определение таких полиномов.

Пусть n — натуральное число. Выражение

$$b_n(t) = \frac{1}{2n+1} (C_{2n}^m)^{-1} \left(2 \cos \frac{t}{2}\right)^{2n} \quad (1)$$

называется *ядром Валле-Пуссена* порядка n [3, с. 26–35].

По формуле Эйлера

$$2 \cos \frac{t}{2} = e^{it/2} + e^{-it/2},$$

так что

$$\left(2 \cos \frac{t}{2}\right)^{2n} = \sum_{\alpha=0}^{2n} C_{2n}^{\alpha} e^{(it/2)(2n-\alpha)} e^{-(it/2)\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{2n} C_{2n}^{\alpha} e^{it(n-\alpha)} = \sum_{k=-n}^n C_{2n}^{m-k} e^{ikt}.$$

Для ядра $b_n(t)$ получаем представление

$$b_n(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n f_{k,n} e^{ikt}, \quad f_{k,n} = (C_{2n}^m)^{-1} C_{2n}^{m-k}. \quad (2)$$

Отметим, что $f_{0,n} = 1$. Вектор коэффициентов $\mathbf{f}_n = (f_{k,n})_{k=-n}^n$ называется *спектром* ядра $b_n(t)$. На рис. 1 представлен спектр ядра Валле-Пуссена при $n = 16$.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DNA & CAGD»: <http://www.dha.spb.ru/>

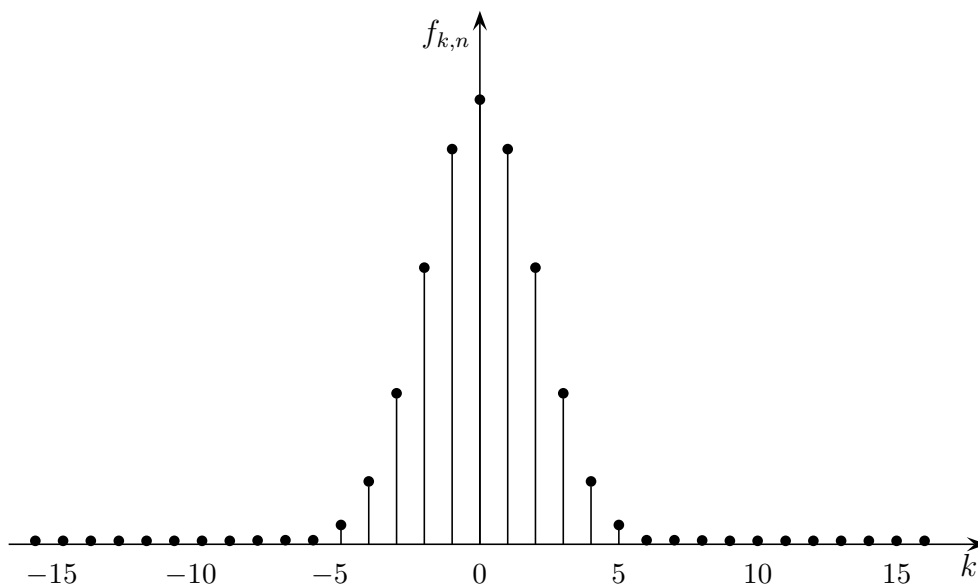


Рис. 1. Спектр ядра Валле-Пуссена при $n = 16$

Учитывая, что $f_{-k,n} = f_{k,n}$, формулу (2) можно переписать в виде

$$b_n(t) = \frac{1}{2n+1} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n f_{k,n} \cos(kt) \right). \quad (3)$$

В свою очередь при $k \in 1 : n$

$$f_{k,n} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} = \frac{(n-k+1) \cdots n}{(n+1) \cdots (n+k)} = \prod_{s=1}^k \frac{n-s+1}{n+s}.$$

На основании (1)–(3) заключаем, что ядро Валле-Пуссена $b_n(t)$ является неотрицательным чётным тригонометрическим полиномом порядка n с положительными коэффициентами.

2°. Введём узлы $t_j = 2\pi j/N$, где $N = 2n + 1$.

ЛЕММА 1. *Справедливо тождество*

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_n(t - t_j) \equiv 1. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Согласно (2) имеем

$$b_n(t - t_j) = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^n f_{k,n} e^{ik(t-t_j)} = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^n f_{k,n} \omega_N^{-kj} e^{ikt}. \quad (5)$$

Значит,

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_n(t - t_j) = \sum_{k=-n}^n f_{k,n} e^{ikt} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{-kj} \right\} = \sum_{k=-n}^n f_{k,n} e^{ikt} \delta_N(k) = f_{0,n} = 1,$$

что и требовалось установить. \square

З°. Тригонометрический полином порядка n в форме Валле-Пуссена определяется следующим образом:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j b_n(t - t_j). \quad (6)$$

Здесь p_j — комплексные коэффициенты, которые называются также *полюсами*. Через $\mathbf{p} = (p_j)_{j=0}^{N-1}$ обозначим вектор коэффициентов.

Найдем спектр полинома $p(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеет место представление*

$$p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}, \quad (7)$$

где

$$c_k = f_{k,n} [\mathcal{F}_N(\mathbf{p})](k). \quad (8)$$

Доказательство. Согласно (6) и (5)

$$p(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} p_j \sum_{k=-n}^n f_{k,n} \omega_N^{-kj} e^{ikt} = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^n f_{k,n} e^{ikt} \sum_{j=0}^{N-1} p_j \omega_N^{-kj}.$$

Это соответствует формулам (7) и (8). \square

Формула (8) позволяет перейти от представления (6) полинома $p(t)$ к представлению (7). Обратный переход связан с формулой обращения для дискретного преобразования Фурье:

$$p_j = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^n \frac{c_k}{f_{k,n}} \omega_N^{kj}, \quad j \in 0 : N - 1. \quad (9)$$

Зафиксируем $s \in -n : n$ и рассмотрим конкретный спектр: $c_s = 1$ и $c_k = 0$ при $k \neq s$. Согласно (9) такой спектр порождает полюсы

$$p_j = \frac{1}{N} \frac{\omega_N^{sj}}{f_{s,n}}, \quad j \in 0 : N - 1.$$

На основании (7) и (6) приходим к соотношению

$$e^{ist} = \frac{1}{f_{s,n}} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{sj} b_n(t - t_j), \quad s \in -n : n.$$

Это соотношение, в частности, показывает, что любой тригонометрический полином порядка не выше n можно представить в форме Валле-Пуссена.

4°. Когда t изменяется от 0 до 2π , точка $p(t)$ вида (6) описывает замкнутую кривую на комплексной плоскости. Эта кривая называется *периодической кривой Безье порядка n* .

Перепишем формулу (6) так:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{N-1} b_n(t - t_j) p_j.$$

При фиксированном t числа $b_n(t - t_j)$ неотрицательны и согласно (4) в сумме равны единице. Это значит, что точка $p(t)$ является выпуклой комбинацией полюсов. Отсюда следует замечательный факт: *вся периодическая кривая Безье лежит в выпуклой оболочке своих полюсов*.

На рис. 2 приведен пример периодической кривой Безье второго порядка.

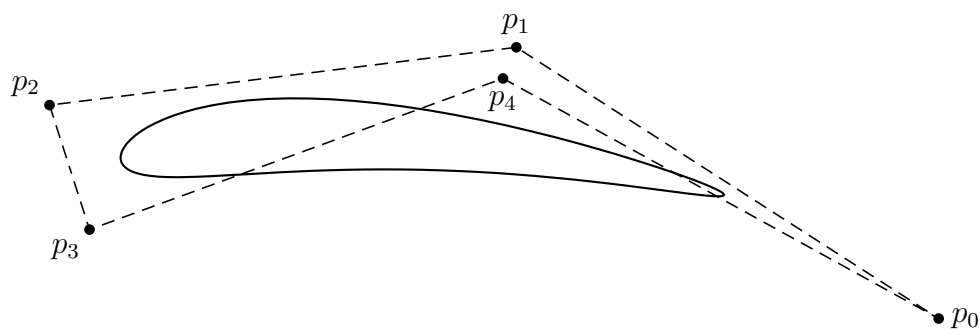


Рис. 2. Периодическая кривая Безье второго порядка

5°. Рассмотрим вопрос о повышении порядка периодической кривой Безье. Возьмем натуральное число $\hat{n} > n$ и обозначим $\hat{N} = 2\hat{n} + 1$, $\hat{t}_j = 2\pi j / \hat{N}$. Попытаемся представить полином $p(t)$ порядка n в виде полинома порядка \hat{n} . Запишем

$$p(t) = \sum_{j=0}^{\hat{N}-1} \hat{p}_j b_{\hat{n}}(t - \hat{t}_j). \quad (10)$$

Согласно предложению 1

$$\sum_{j=0}^{\hat{N}-1} \hat{p}_j b_{\hat{n}}(t - \hat{t}_j) = \frac{1}{\hat{N}} \sum_{k=-\hat{n}}^{\hat{n}} \hat{c}_k e^{ikt}, \quad (11)$$

где $\hat{c}_k = f_{k,\hat{n}} [\mathcal{F}_{\hat{N}}(\hat{\mathbf{p}})](k)$. Положим

$$\hat{c}_k = \begin{cases} (\hat{N}/N) c_k & \text{при } k \in -n : n, \\ 0 & \text{при } |k| \in n+1 : \hat{n}. \end{cases}$$

Тогда правая часть (11) в силу (7) будет равна $p(t)$. С помощью формул (9) и (8) по спектру $(\hat{c}_k)_{k=-\hat{n}}^{\hat{n}}$ восстановим полюсы $(\hat{p}_j)_{j=0}^{\hat{N}-1}$:

$$\begin{aligned} \hat{p}_j &= \frac{1}{\hat{N}} \sum_{k=-n}^n \frac{c_k}{f_{k,\hat{n}}} \omega_{\hat{N}}^{kj} = \frac{1}{\hat{N}} \sum_{k=-n}^n \frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}} \omega_{\hat{N}}^{kj} \sum_{s=0}^{N-1} p_s \omega_N^{-ks} = \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} p_s \left(\frac{1}{\hat{N}} \sum_{k=-n}^n \frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}} \frac{\omega_{\hat{N}}^{kj}}{\omega_N^{ks}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Если ввести матрицу A порядка $\hat{N} \times N$ с элементами

$$A_{j,s} = \frac{1}{\hat{N}} \sum_{k=-n}^n \frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}} \frac{\omega_{\hat{N}}^{kj}}{\omega_N^{ks}}, \quad j \in 0 : \hat{N} - 1, \quad s \in 0 : N - 1,$$

то формулу (12) можно переписать в виде

$$\hat{\mathbf{p}} = A \mathbf{p}. \quad (13)$$

Подведем итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Тригонометрический полином $p(t)$, определяемый формулой (6), при любом $\hat{n} > n$ допускает представление (10), в котором вектор коэффициентов $\hat{\mathbf{p}}$ пересчитывается по формуле (13).

6°. Теперь покажем, что множество полюсов $(\hat{p}_j)_{j=0}^{\hat{N}-1}$ при $\hat{n} \rightarrow \infty$ стремится к графику полинома $p(t)$. Зафиксируем $t \in [0, 2\pi)$ и положим $j_{\hat{n}} = \lfloor \frac{\hat{N}t}{2\pi} \rfloor$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\hat{n} \rightarrow \infty} \hat{p}_{j_{\hat{n}}} = p(t).$$

Доказательство. В силу (12) достаточно проверить, что при $s \in 0 : N - 1$

$$\lim_{\hat{n} \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^n \frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}} \frac{\omega_{\hat{N}}^{kj\hat{n}}}{\omega_N^{ks}} = b_n(t - t_s).$$

Согласно (5) это равносильно проверке предельных соотношений

$$\lim_{\hat{n} \rightarrow \infty} \frac{\omega_{\hat{N}}^{kj\hat{n}}}{f_{k,\hat{n}}} = e^{ikt}, \quad k \in -n : n.$$

Имеем

$$\omega_{\hat{N}}^{kj\hat{n}} = \exp\left(\frac{2\pi i}{\hat{N}} k \left\lfloor \frac{\hat{N}t}{2\pi} \right\rfloor\right). \quad (14)$$

По определению целой части числа

$$\frac{\hat{N}t}{2\pi} \leq \left\lfloor \frac{\hat{N}t}{2\pi} \right\rfloor < \frac{\hat{N}t}{2\pi} + 1,$$

так что

$$t \leq \frac{2\pi}{\hat{N}} \left\lfloor \frac{\hat{N}t}{2\pi} \right\rfloor < t + \frac{2\pi}{\hat{N}}.$$

Отсюда и из (14) следует, что при $k \in -n : n$

$$\lim_{\hat{n} \rightarrow \infty} \omega_{\hat{N}}^{kj\hat{n}} = e^{ikt}.$$

Остается отметить, сославшись на последнюю формулу из п. 1°, что $f_{k,\hat{N}} \rightarrow 1$ при $\hat{n} \rightarrow \infty$ и тех же k . Предложение доказано. \square

На рис. 3 иллюстрируется процедура повышения порядка периодической кривой Безье, изображенной на рис. 2.

7°. Для построения периодической кривой Безье нужно вычислить значения полинома $p(t)$ вида (6) на мелкой сетке $\tau_s = 2\pi s/M$, $s \in 0 : M - 1$, где $M > N$. Согласно (7) имеем

$$\begin{aligned} p(\tau_s) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^n c_k \omega_M^{ks} = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^n c_k \omega_M^{ks} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k \omega_M^{(k+M)s} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^n c_k \omega_M^{ks} + \sum_{k=M-n}^{M-1} c_{k-M} \omega_M^{ks} \right). \end{aligned}$$

Положим

$$d_k = \begin{cases} (M/N) c_k & \text{при } k \in 0 : n, \\ 0 & \text{при } k \in n + 1 : M - n - 1, \\ (M/N) c_{k-M} & \text{при } k \in M - n : M - 1. \end{cases}$$

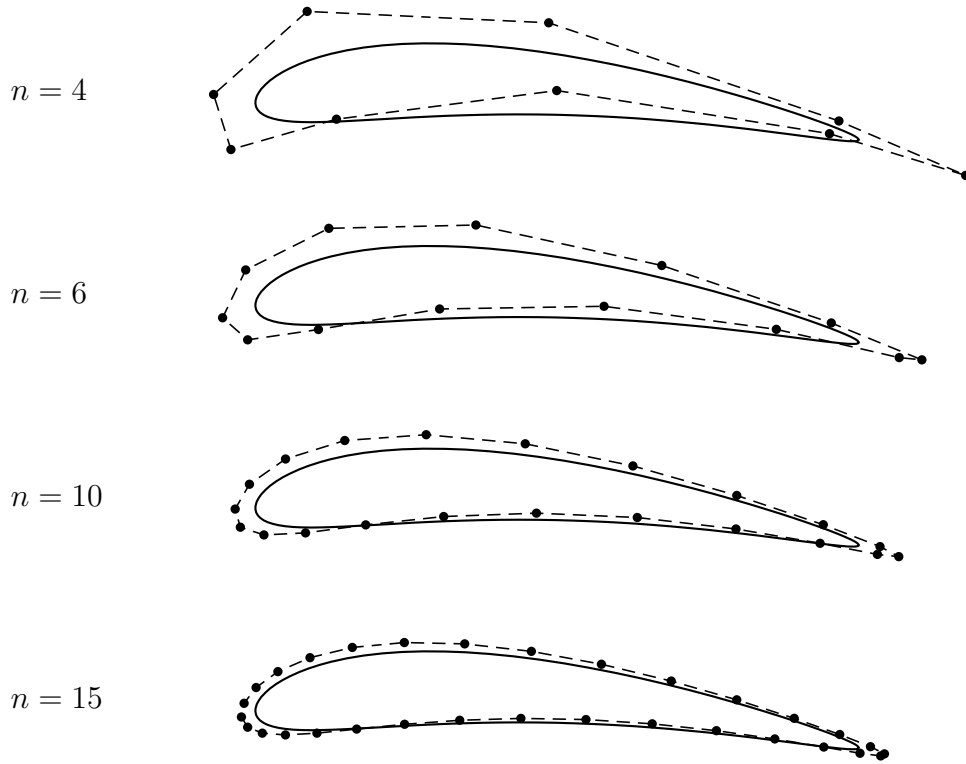


Рис. 3. Повышение порядка периодической кривой Безье

Тогда

$$p(\tau_s) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} d_k \omega_N^{ks}, \quad s \in 0 : M - 1.$$

Это значит, что $p(\tau_s)$ суть значения обратного преобразования Фурье от спектра $\mathbf{d} = (d_k)_{k=0}^{M-1}$.

Обозначим

$$h_k = [\mathcal{F}_N(\mathbf{p})](k), \quad k \in 0 : N - 1.$$

Отметим, что в силу (8), четности $f_{k,n}$ по k и N -периодичности h_k , при $k \in M - n : M - 1$ справедлива формула

$$c_{k-M} = f_{M-k,n} h_{k-M+N}.$$

Для спектра \mathbf{d} получаем представление

$$d_k = \begin{cases} (M/N) f_{k,n} h_k & \text{при } k \in 0 : n, \\ 0 & \text{при } k \in n + 1 : M - n - 1, \\ (M/N) f_{M-k,n} h_{k-M+N} & \text{при } k \in M - n : M - 1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Sánchez-Reyes J. *Periodic Bezier curves* // Computer Aided Geometric Design. 2009. Vol. 26. P. 989-1005.
2. Григорьев М. И., Малоземов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С. 1962-1971.
3. Натансон И. П. *Конструктивная теория функций*. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 688 с.