ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯРНЫХ ФОРМ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

2 декабря 2006 г.

1°. Напомним [1, 2], что *полярной формой* алгебраического полинома от одной переменной вида

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a_k \, x^k \tag{1}$$

называется выражение

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, \sigma_k(x_1, \dots, x_n), \tag{2}$$

где $\sigma_k(x_1, \dots, x_n)$ — основные симметрические полиномы от n переменных:

$$\begin{gathered} \sigma_0(x_1, \dots, x_n) \equiv 1, \\ \sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{I_k \subset N} \prod_{i \in I_k} x_i, \qquad k = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{3}$$

Суммирование в правой части (3) ведётся по всем подмножествам I_k множества $N = \{1, \dots, n\}$, содержащим ровно k элементов. В частности,

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ \sigma_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 x_2 \cdots x_n. \end{aligned}$$

Очевидно, что полярная форма (2) является симметричной функцией своих аргументов. С порождающим полиномом (1) её связывает соотношение

$$p(x, \dots, x) = P(x). \tag{4}$$

Значение полярной формы при конкретных значениях аргументов $x_1, \dots, x_n$ называется *полюсом* полинома $P(x)$.

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

2°. Покажем, как эффективно вычислять полюсы.

Зафиксируем $x_1, \ldots, x_n$ и построим треугольный массив $\{a_k^{(i)}\}$, $k \in 0:n-i$, $i \in 0:n$, по правилу

$$\begin{aligned} &a_k^{(i)} = a_k^{(i-1)} + x_{n-i+1}\, a_{k+1}^{(i-1)}, \qquad k \in 0:n-i, \quad i \in 1:n; \\ &a_k^{(0)} = a_k, \qquad k \in 0:n. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо равенство*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = a_0^{(n)}. \tag{5}$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 2$. Из определения основных симметрических полиномов следует, что они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) + x_n\, \sigma_{k-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad k \in 1:n-1. \tag{6}$$

Согласно (6)

$$\begin{aligned} p(x_1, \ldots, x_n) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \big[\sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) + x_n\, \sigma_{k-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})\big] + \\ &+ a_n\, x_1 \cdots x_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) + x_n \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\, \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \big(a_k^{(0)} + x_n\, a_{k+1}^{(0)}\big)\, \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(1)}\, \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Продолжив аналогично, получим

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{1} a_k^{(n-1)} \sigma_k(x_1) = a_0^{(n-1)} + x_1\, a_1^{(n-1)} = a_0^{(n)}.$$

Предложение доказано. $\square$

3°. Важнейшим свойством полярной формы является её мультиаффинность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При любом $j \in 1:n$*

$$\begin{aligned} p(x_1, \ldots, \alpha\, x_j' + \beta\, x_j'', \ldots, x_n) = \alpha\, p(x_1, \ldots, x_j', \ldots, x_n) + \\ + \beta\, p(x_1, \ldots, x_j'', \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{7}$$

если $\alpha + \beta = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 1$ имеем $p(x_1) = a_0 + a_1\, x_1$. Взяв $\alpha + \beta = 1$, получим

$$p(\alpha\, x_1' + \beta\, x_1'') = (\alpha + \beta)\, a_0 + a_1\, (\alpha\, x_1' + \beta\, x_1'') = \alpha\, p(x_1') + \beta\, p(x_1''),$$

что соответствует (7).

Пусть $n \geqslant 2$. В силу симметричности полярной формы достаточно рассмотреть случай $j = n$. Если же учесть формулу (2), то дело сводится к проверке соотношения

$$\begin{gathered} \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha\, x_n' + \beta\, x_n'') = \alpha\, \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n') + \\ + \beta\, \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n''), \qquad k \in 0 : n, \quad \alpha + \beta = 1. \end{gathered} \tag{8}$$

При $k = 0$ и $k = n$ равенство (8) очевидно. При $k \in 1 : n - 1$ воспользуемся формулой (6), согласно которой

$$\begin{gathered} \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha\, x_n' + \beta\, x_n'') = (\alpha + \beta)\, \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \\ + (\alpha\, x_n' + \beta\, x_n'')\, \sigma_{k-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \alpha\, \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n') + \\ + \beta\, \sigma_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n''). \end{gathered}$$

Предложение доказано. □

4°. Зафиксируем $2n$ точек на вещественной оси

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n < x_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant x_{2n} \tag{9}$$

и введём $n + 1$ полюс полинома $P(x)$ вида (1):

$$p_{i,i+1,\ldots,i+n-1} = p(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}), \qquad i = 1, \ldots, n + 1. \tag{10}$$

Такая система полюсов называется *примитивной* [1, с. 143]. Покажем, как по полюсам (10) восстановить значение $P(x)$ в любой точке $x = x_*$.

Вычисления проводятся по следующей схеме:

$$\begin{array}{llllll}
p_{1,2,\ldots,n} & & & & & \\
 & p_{2,\ldots,n,*} & & & & \\
p_{2,3,\ldots,n+1} & & p_{3,\ldots,*,*} & & & \\
 & p_{3,\ldots,*,n+1} & & \ddots & & \\
p_{3,4,\ldots,n+2} & & & & p_{n,*,\ldots,*} & \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & & p_{*,*,\ldots,*} \\
p_{n-1,\ldots,2n-2} & & & & p_{*,\ldots,*,n+1} & \\
 & p_{n,*,\ldots,2n-2} & & \iddots & & \\
p_{n,\ldots,2n-1} & & p_{*,*,\ldots,2n-2} & & & \\
 & p_{*,n+1,\ldots,2n-1} & & & & \\
p_{n+1,\ldots,2n} & & & & &
\end{array}$$

В первом столбце стоят исходные данные. Элементы второго столбца вычисляются по формуле

$$
\begin{aligned}
p_{i+1,\ldots,n,*,n+1,\ldots,n+i-1} = \big[(x_{n+i} - x_*)p_{i,i+1,\ldots,n+i-1} + \\
+ (x_* - x_i)p_{i+1,\ldots,n+i-1,n+i}\big]/(x_{n+i} - x_i), \qquad i = 1,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Справедливость (11) следует из симметричности и мультиаффинности полярной формы. Действительно,

$$
\begin{aligned}
\frac{(x_{n+i} - x_*)\,p(x_{i+1},\ldots,x_{n+i-1},x_i) + (x_* - x_i)\,p(x_{i+1},\ldots,x_{n+i-1},x_{n+i})}{x_{n+i} - x_i} = \\
= p\Big(x_{i+1},\ldots,x_{n+i-1},\frac{(x_{n+i} - x_*)x_i + (x_* - x_i)x_{n+i}}{x_{n+i} - x_i}\Big) = \\
= p(x_{i+1},\ldots,x_{n+i-1},x_*) = p(x_{i+1},\ldots,x_n,x_*,x_{n+1},\ldots,x_{n+i-1}).
\end{aligned}
$$

Формула (11) определяет *процедуру включения узла.*

Остальные столбцы треугольной таблицы заполняются аналогично. Элементы $(k+1)$-го столбца вычисляются так:

$$
\begin{aligned}
p_{i+k,\ldots,n,\underbrace{*,\ldots,*}_{k \text{ раз}},n+1,\ldots,n+i-1} = \big[(x_{n+i} - x_*)\,p_{i+k-1,\ldots,n,\underbrace{*,\ldots,*}_{(k-1) \text{ раз}},n+1,\ldots,n+i-1} + \\
+ (x_* - x_{i+k-1})\,p_{i+k,\ldots,n,\underbrace{*,\ldots,*}_{(k-1) \text{ раз}},n+1,\ldots,n+i}\big]/(x_{n+i} - x_{i+k-1}), \\
i = 1,\ldots,n-k+1; \qquad k = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned}
$$

Поскольку $x_n < x_{n+1}$, то все вычисления по указанным формулам выполнимы. В результате согласно (4) получим $p_{*,*,\ldots,*} = P(x_*)$.

5°. Зафиксируем числа $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ и рассмотрим задачу *интерполирования по полюсам*: найти полином $P(x)$ вида (1), такой, что

$$
p(x_i, x_{i+1},\ldots,x_{i+n-1}) = y_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n+1. \tag{12}
$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При выполнении условия* (9) *интерполяционная задача* (12) *имеет решение при любых правых частях и это решение единственно.*

Доказательство. Напомним, что

$$
p(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\sigma_k(x_1,\ldots,x_n).
$$

Это значит, что (12) есть система линейных уравнений относительно коэффициентов $\{a_k\}$ полинома $P(x)$.

Рассмотрим однородную систему

$$p(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n+1, \tag{13}$$

и покажем, что она имеет только нулевое решение. Отсюда будет следовать требуемое заключение.

Возьмём любое решение системы (13). Соответствующий полином вида (1) обозначим $P_0(x)$. По условию его примитивные полюсы $p_0(x_i, \ldots, x_{i+n-1})$ при $i \in 1 : n+1$ равны нулю. Применив процедуру включения узла получим, что $P_0(x) \equiv 0$. Но тогда и все коэффициенты полинома $P_0(x)$ равны нулю.

Предложение доказано. $\square$

6°. Условие (9), очевидно, выполняется при

$$x_1 = \cdots = x_n = 0, \qquad x_{n+1} = \cdots = x_{2n} = 1. \tag{14}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *В случае* (14) *единственным решением интерполяционной задачи* (12) *является полином*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_{i+1}\, C_n^i\, x^i\, (1-x)^{n-i}.$$

Доказательство. В данном случае

$$\sigma_k(x_i, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+i-1}) = \sigma_k(0, \ldots, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{(i-1)\ \text{раз}}) =$$

$$= \begin{cases} C_{i-1}^k & \text{при } k \in 0 : i-1, \\ 0 & \text{при } k \in i : n, \end{cases}$$

поэтому система уравнений (12) примет вид

$$\sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k\, a_k = y_i, \qquad i \in 1 : n+1. \tag{15}$$

Как известно [3, с. 60], ей удовлетворяют числа

$$a_k = (\Delta^k y)_1 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\, C_k^i\, y_{i+1}, \qquad k \in 0 : n$$

(к этому факту мы ещё вернёмся). Для интерполяционного по полюсам полинома получаем формулу

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (\Delta^k y)_1 \, x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \, C_k^i \, y_{i+1} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} y_{i+1} \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \, C_n^k \, C_k^i \, x^k.$$

Остаётся проверить, что

$$\sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \, C_n^k \, C_k^i \, x^k = C_n^i \, x^i \, (1-x)^{n-i}, \qquad i \in 0:n. \tag{16}$$

Но это очевидно, поскольку $C_n^k \, C_k^i = C_n^i \, C_{n-i}^{k-i}$.

Вернёмся к системе уравнений (15) и покажем, что

$$\sum_{k=0}^{i} C_i^k \, (\Delta^k y)_1 = y_{i+1}, \qquad i \in 0:n. \tag{17}$$

При $i = 0$ равенство (17) тривиально. Пусть $i \in 1:n$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{i} C_i^k \, (\Delta^k y)_1 = \sum_{k=0}^{i-1} C_i^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \, C_k^l \, y_{l+1} + \sum_{l=0}^{i} (-l)^{i-l} \, C_i^l \, y_{l+1} =$$
$$= \sum_{l=0}^{i-1} y_{l+1} \sum_{k=l}^{i-1} (-1)^{k-l} \, C_i^k \, C_k^l + \sum_{l=0}^{i-1} (-1)^{i-l} \, C_i^l \, y_{l+1} + y_{i+1} =$$
$$= y_{i+1} + \sum_{l=0}^{i-1} y_{l+1} \Big\{ \sum_{k=l}^{i} (-1)^{k-l} \, C_i^k \, C_k^l \Big\}.$$

Выражение в фигурных скобках при $l \in 0:i-1$ равно нулю. Это следует из (16) при $x = 1$. Равенство (17), а с ним и предложение, доказаны. $\square$

По существу установлено, что при выполнении условия (14) интерполяционным по полюсам полиномом является полином в форме Бернштейна, коэффициентами которого служат сами полюсы $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кастельжо П. *Теория полюсов* / В кн.: Математика и САПР. Том 1. Пер. с фр. М.: Мир, 1988. С. 130–200.

2. Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Аналитические основы теории полярных форм* // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. Вып. 6. С. 156–185.

3. Мысовских И. П. *Лекции по методам вычислений.* Изд. 2-е. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 472 с.