ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОЧКИ НА ТЕЛЕСНЫЙ СИМПЛЕКС*

В. Н. Малоземов   Г. Ш. Тамасян
malv@math.spbu.ru   g.tamasyan@spbu.ru

11 октября 2013 г.

В докладе [1] рассматривались два быстрых алгоритма проектирования точки на стандартный симплекс $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Теперь мы обратимся к задаче проектирования точки на телесный симплекс $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, определяемый условиями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1; \quad x_i \geqslant 0,\ i \in 1:n.$$

Задача ставится так:

$$Q(x) := \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2 \to \min_{x \in \Omega}, \tag{1}$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — координаты проектируемой точки c. Эта задача имеет единственное решение x^*.

Введем величину

$$h = \sum_{i=1}^{n} (c_i)_+,$$

где $(c_i)_+ = \max\{0, c_i\}$. Обозначим $c_+ = \big((c_1)_+, \ldots, (c_n)_+\big)$.

ТЕОРЕМА. *Если $h \leqslant 1$, то*

$$x^* = c_+. \tag{2}$$

При $h > 1$ справедливо равенство

$$x^* = \mathrm{Pr}_\Lambda(c_+). \tag{3}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Таким образом, при $h > 1$ задача (1) сводится к задаче проектирования точки c_+ на стандартный симплекс Λ.

Доказательство. Запишем критерий оптимальности для задачи (1) (см. [2, с. 91]):

$$\begin{gathered} x_i - c_i = u_i - \lambda, \quad i \in 1:n; \\ \lambda(1 - x_1 - \ldots - x_n) = 0, \quad \lambda \geqslant 0; \\ u_i\, x_i = 0, \quad u_i \geqslant 0, \quad x_i \geqslant 0, \quad i \in 1:n; \\ x_1 + \ldots + x_n \leqslant 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что в случае $h \leqslant 1$ все условия (4) выполняются при

$$x_i = (c_i)_+, \quad u_i = (c_i)_+ - c_i, \quad i \in 1:n; \qquad \lambda = 0.$$

В частности, равенство $\big((c_i)_+ - c_i\big)(c_i)_+ = 0$, справедливое при всех $i \in 1:n$, обеспечивает выполнение условия дополнительсти $u_i\, x_i = 0$, $i \in 1:n$. Значит, верна формула (2).

Допустим, что $h > 1$. Обозначим $\widehat{y} = \mathrm{Pr}_\Lambda(c_+)$. По критерию оптимальности (см. [1])

$$\begin{gathered} \widehat{y}_i - (c_i)_+ = \widehat{\lambda} + \widehat{u}_i, \quad i \in 1:n; \\ \widehat{u}_i\, \widehat{y}_i = 0, \quad \widehat{u}_i \geqslant 0, \quad \widehat{y}_i \geqslant 0, \quad i \in 1:n; \\ \widehat{y}_1 + \ldots + \widehat{y}_n = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Сложив равенства из первой строки условий (5), получим

$$1 - h = n\widehat{\lambda} + \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i.$$

Отсюда следуют, что

$$\widehat{\lambda} < -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i.$$

В частности, $\widehat{\lambda} < 0$.

Если все c_i неотрицательны, то положим

$$x_i = \widehat{y}_i, \quad u_i = \widehat{u}_i, \quad i \in 1:n; \qquad \lambda = -\widehat{\lambda}.$$

На основании (5) заключаем, что при этих данных выполняются все условия (4). Значит,

$$x^* = \widehat{y} = \mathrm{Pr}_\Lambda(c_+).$$

Допустим, что среди координат c_i имеется хотя бы одна отрицательная. Обозначим

$$I = \{i \in 1:n \mid c_i \leqslant 0\}.$$

При $i \in I$ равенство из первой строки условий (5) принимает вид

$$\widehat{y}_i = \widehat{\lambda} + \widehat{u}_i, \quad i \in I. \tag{6}$$

Умножим обе части последнего равенства на $\widehat{y}_i$. Учитывая условие дополнительности, получаем

$$\widehat{y}_i^2 = \widehat{\lambda}\,\widehat{y}_i, \quad i \in I. \tag{7}$$

Напомним, что $\widehat{\lambda} < 0$ и $\widehat{y}_i \geqslant 0$, поэтому из (7) и (6) следует, что

$$\widehat{y}_i = 0, \quad \widehat{u}_i = -\widehat{\lambda}, \quad i \in I. \tag{8}$$

Перепишем первое условие из (5) в виде

$$\begin{aligned} \widehat{y}_i - c_i &= (\widehat{u}_i - c_i) - (-\widehat{\lambda}), \quad i \in I; \\ \widehat{y}_i - c_i &= \widehat{u}_i - (-\widehat{\lambda}), \quad i \notin I. \end{aligned} \tag{9}$$

Положив $\lambda^* = -\widehat{\lambda}$,

$$u_i^* = \begin{cases} \widehat{u}_i - c_i, & i \in I; \\ \widehat{u}_i, & i \notin I, \end{cases}$$

придем к другому представлению формулы (9):

$$\widehat{y}_i - c_i = u_i^* - \lambda^*, \quad i \in 1:n.$$

При этом согласно (8) и определению множества I имеем $u_i^* > 0$ при $i \in I$. По определению $u_i^* = \widehat{u}_i \geqslant 0$ при $i \notin I$. Условие неотрицательности двойственных переменных u_i^* выполняется для всех $i \in 1:n$.

Осталось проверить условие дополнительности $u_i^*\,\widehat{y}_i = 0$, $i \in 1:n$. При $i \in I$ оно выполняется в силу (8), а при $i \notin I$ — в силу (5).

Таким образом, при $x_i = \widehat{y}_i$, $u_i = u_i^*$, $i \in 1:n$; $\lambda = \lambda^*$ выполняются все условия (4). Это гарантирует, что

$$x^* = \widehat{y} = \mathrm{Pr}_\Lambda(c_+).$$

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н., Тамасян Г. Ш. *Ещё один быстрый алгоритм проектирование точки на стандартный симплекс* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 5 сентября 2013 г. (`http://dha.spb.ru/reps13.shtml#0905`)

2. Гавурин М. К., Малоземов В. Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.