ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ*

А. М. Дурягин Н. А. Соловьёва

alex_maks@mail.ru vinyo@mail.ru

9 октября 2007 г.

В докладе используется определение вещественного гармонического фрейма, данное в работе [1]. Акцент делается на быстром вычислении фреймовых коэффициентов.

1°. Обозначим через $\mathbb{R}_N$ линейное пространство вещественнозначных N-периодических сигналов $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Гармонические фреймы в $\mathbb{R}_N$ вводятся отдельно для случаев нечётного и чётного N. Начнём с нечётного N, $N = 2n+1$, $n \geqslant 1$.

При $m \geqslant N$ рассмотрим сигналы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ из $\mathbb{R}_N$ с отсчётами

$$\varphi_k(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}\,; \qquad \varphi_k(j) = \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{2kj\pi}{m}\,, \qquad j \in 1:n\,;$$
$$\varphi_k(n+j) = \sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{2kj\pi}{m}\,, \qquad j \in 1:n\,.$$

Нетрудно проверить, что $\|\varphi_k\| = 1$ при всех $k \in 0:m-1$. Отметим также, что

$$\varphi_k(j) + i\,\varphi_k(n+j) = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\omega_m^{kj}, \qquad j \in 1:n, \tag{1}$$

где $\omega_m = \exp(2\pi i/m)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для всех $x \in \mathbb{R}_N$ при $N = 2n+1$ справедливо разложение*

$$x(j) = \frac{N}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\langle x, \varphi_k\rangle\,\varphi_k(j), \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим коэффициенты $a_k = \langle x, \varphi_k \rangle$. Имеем

$$
\begin{gathered}
a_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\, x(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=1}^{n} \Big[x(j) \cos \frac{2kj\pi}{m} + x(n+j) \sin \frac{2kj\pi}{m} \Big] = \\
= \frac{1}{\sqrt{N}} \Big\{ x(0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big[x(j) \big(\omega_m^{kj} + \omega_m^{-kj}\big) - i\, x(n+j) \big(\omega_m^{kj} - \omega_m^{-kj}\big) \Big] \Big\} = \\
= \sqrt{\frac{2}{N}} \Big\{ \frac{\sqrt{2}}{2}\, x(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big[\big(x(j) - i\, x(n+j)\big) \omega_m^{kj} + \big(x(j) + i\, x(n+j)\big) \omega_m^{-kj} \Big] \Big\}.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Введём сигнал $y_1 \in \mathbb{C}_m$ с отсчётами

$$
y_1(j) = \begin{cases} x(j) + i\, x(n+j) & \text{при } j \in 1:n, \\ 0 \quad \text{при } j = 0 \text{ и } j \in n+1 : m-1. \end{cases}
$$

Обозначим $Y_1 = \mathcal{F}_m(y_1)$. Тогда равенство (3) можно переписать так:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \sqrt{\frac{2}{N}} \Big\{ \frac{\sqrt{2}}{2}\, x(0) + \frac{1}{2} \big(\overline{Y_1}(k) + Y_1(k) \big) \Big\} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{N}} \Big\{ \frac{\sqrt{2}}{2}\, x(0) + \operatorname{Re} Y_1(k) \Big\}, \qquad k \in 0 : m-1.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Обратимся к формуле (2). Её правую часть обозначим $S(j)$. Согласно (4)

$$
S(j) = \frac{\sqrt{N}}{m}\, x(0) \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(j) + \frac{\sqrt{2N}}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \big[\operatorname{Re} Y_1(k) \big]\, \varphi_k(j), \quad j \in 0 : N-1. \tag{5}
$$

Нетрудно проверить, что $S(0) = x(0)$. Это следует из равенства

$$
\sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(0) = \frac{m}{\sqrt{N}}
$$

и формулы обращения для ДПФ, согласно которой

$$
\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} Y_1(k) = y_1(0) = 0.
$$

Теперь покажем, что

$$
\sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(j) = 0 \qquad \text{при } j \in 1 : N-1. \tag{6}
$$

Согласно (1) при $j \in 1:n$ имеем

$$\sum_{k=0}^{m-1} \big[\varphi_k(j) + i\,\varphi_k(n+j)\big] = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{kj} = m\sqrt{\frac{2}{N}}\,\delta_m(j) = 0.$$

Это гарантирует справедливость равенства (6).

При $j \in 1:N-1$ формула (5) приобретает более простой вид

$$S(j) = \frac{\sqrt{2N}}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \big[\operatorname{Re} Y_1(k)\big]\,\varphi_k(j).$$

Отметим, что при $j \in 1:n$

$$S(j) + i\,S(n+j) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \big[\,Y_1(k) + \overline{Y_1(k)}\,\big]\,\omega_m^{kj}.$$

Воспользуемся формулой обращения для ДПФ. Получим

$$S(j) + i\,S(n+j) = y_1(j) + \overline{y_1(-j)}, \qquad j \in 1:n.$$

Поскольку $y_1(-j) = y_1(m-j)$ и $m-1 \geqslant m-j \geqslant m-n \geqslant n+1$, то $y_1(-j) = 0$. Значит,

$$S(j) + i\,S(n+j) = y_1(j) = x(j) + i\,x(n+j), \qquad j \in 1:n.$$

Отсюда следует, что $S(j) = x(j)$ при $j \in 1:N-1$. Предложение доказано. $\square$

2°. Перейдём к случаю чётного N, $N = 2n$, $n \geqslant 1$. При $m \geqslant N$ в пространстве $\mathbb{R}_N$ рассмотрим сигналы $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ с отсчётами

$$\psi_k(j) = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\cos\frac{(2j+1)k\pi}{m}\,, \qquad j \in 0:n-1\,;$$
$$\psi_k(n+j) = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\sin\frac{(2j+1)k\pi}{m}\,, \qquad j \in 0:n-1\,.$$

Нетрудно проверить, что $\|\psi_k\| = 1$ при всех $k \in 0:m-1$. Отметим также, что

$$\psi_k(j) + i\,\psi_k(n+j) = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\omega_{2m}^{(2j+1)k} = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\omega_{2m}^{k}\,\omega_m^{kj}, \quad j \in 0:n-1. \tag{7}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для всех $x \in \mathbb{R}_N$ при $N = 2n$ справедливо разложение*

$$x(j) = \frac{N}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \langle x, \psi_k\rangle\,\psi_k(j), \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим коэффициенты $a_k = \langle x, \psi_k \rangle$. Имеем

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \Big[x(j) \cos \frac{(2j+1)k\pi}{m} + x(n+j) \sin \frac{(2j+1)k\pi}{m} \Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=0}^{n-1} \Big[x(j) \big(\omega_{2m}^{(2j+1)k} + \omega_{2m}^{-(2j+1)k} \big) - i\, x(n+j) \big(\omega_{2m}^{(2j+1)k} - \omega_{2m}^{-(2j+1)k} \big) \Big] =$$

$$= \frac{\omega_{2m}^{k}}{\sqrt{2N}} \sum_{j=0}^{n-1} \big[x(j) - i\, x(n+j) \big]\, \omega_m^{kj} + \frac{\omega_{2m}^{-k}}{\sqrt{2N}} \sum_{j=0}^{n-1} \big[x(j) + i\, x(n+j) \big]\, \omega_m^{-kj}. \qquad (9)$$

Введём сигнал $y_2 \in \mathbb{C}_m$ с отсчётами

$$y_2(j) = \begin{cases} x(j) + i\, x(n+j), & \text{при } j \in 0 : n-1, \\ 0, & \text{при } j \in n : m-1. \end{cases}$$

Обозначим $Y_2 = \mathcal{F}_m(y_2)$. Тогда равенство (9) можно переписать так:

$$a_k = \frac{\omega_{2m}^{k}}{\sqrt{2N}}\, \overline{Y_2(k)} + \frac{\omega_{2m}^{-k}}{\sqrt{2N}}\, Y_2(k) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N}}\, \mathrm{Re} \Big\{ \omega_{2m}^{-k}\, Y_2(k) \Big\}, \qquad k \in 0 : m-1. \qquad (10)$$

Обратимся к формуле (8). Её правую часть обозначим $S(j)$. Согласно (10)

$$S(j) = \frac{\sqrt{2N}}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{Re} \Big\{ \omega_{2m}^{-k}\, Y_2(k) \Big\}\, \psi_k(j), \qquad j \in 0 : N-1.$$

Дальнейшие действия связаны с соотношением (7). При $j \in 0 : n-1$ получим

$$S(j) + i\, S(n+j) = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{Re} \Big\{ \omega_{2m}^{-k}\, Y_2(k) \Big\}\, \omega_{2m}^{k}\, \omega_m^{kj} =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \big[\, Y_2(k) + \omega_m^{k} \overline{Y_2(k)}\, \big]\, \omega_m^{kj} = y_2(j) + \overline{y_2(-j-1)}.$$

Поскольку $y_2(-j-1) = y_2(m-j-1)$ и $m-1 \geqslant m-j-1 \geqslant m-n \geqslant n$, то $y_2(-j-1) = 0$. Значит,

$$S(j) + i\, S(n+j) = y_2(j) = x(j) + i\, x(n+j), \qquad j \in 0 : n-1.$$

Отсюда следует, что $S(j) = x(j)$ при $j \in 0 : N-1$. Предложение доказано. $\square$

3°. Разложения (2) и (8) характеризуют системы сигналов $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$ и $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}\}$ как жёсткие фреймы в $\mathbb{R}_N$ при нечётном и чётном N соответственно (см., например, [2]). Эти фреймы называются *гармоническими*. Формулы (4) и (10) обеспечивают быстрое вычисление фреймовых коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goyal V. K., Kovačevič J., Kelner J. A. *Quantized frame expansions with erasures* // Appl. and Comput. Harmonic Analysis. 2001. V. 10. P. 203–233.

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Системы Мерседес-Бенц и жёсткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 февраля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0228`)