ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ*

В. Н. Малозёмов — malv@gamma.math.spbu.ru

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

21 февраля 2006 г.

Доклад представляет собой вариации на темы из [1, с. 99–100] и [2]. Основное внимание уделяется примерам жёстких фреймов.

1°. *Жёстким фреймом* в $\mathbb{C}_N$ называется набор сигналов $\{\psi_1, \ldots, \psi_M\}$, $M \geqslant N$, такой, что при некотором $A > 0$ (*константа фрейма*) любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$x = \tfrac{1}{A} \sum_{k=1}^{M} \langle x, \psi_k \rangle \, \psi_k \,. \tag{1}$$

Если все сигналы ψ_k нормированы, то константа A называется также *коэффициентом избыточности*.

Приведём три примера.

ПРИМЕР 1. Пусть $\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$. Повторим этот базис m раз и умножим каждый элемент полученной последовательности на произвольное комплексное число, по модулю равное единице. Другими словами, при $p = sN + k$ положим

$$\psi_p(j) = \alpha_{sk} u_k(j), \quad k \in 0 : N-1, \quad s \in 0 : m-1,$$

где $|\alpha_{sk}| = 1$. Система сигналов $\{\psi_p\}_{p=0}^{mN-1}$ образует жёсткий фрейм с коэффициентом избыточности m. Действительно,

$$\sum_{p=0}^{mN-1} \langle x, \psi_p \rangle \, \psi_p = \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\alpha_{sk}} \, \langle x, u_k \rangle \, \alpha_{sk} u_k = mx \,.$$

В частности, жёстким фреймом в $\mathbb{C}_N$ с коэффициентом избыточности 2 является следующая система, состоящая из $2N$ сигналов:

$$\psi_k = \delta_N(\cdot - k), \ k \in 0 : N-1; \quad \psi_{N+k} = -\delta_N(\cdot - k), \ k \in 0 : N-1.$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

ПРИМЕР 2. Рассмотрим сигналы

$$\psi_k(j) = \omega_{mN}^{kj}, \quad j \in 0 : N-1, \quad k \in 0 : mN-1.$$

Считаем, что все ψ_k принадлежат $\mathbb{C}_N$. Имеем при $j \in 0 : N-1$

$$\sum_{k=0}^{mN-1} \langle x, \psi_k \rangle\, \psi_k(j) = \sum_{k=0}^{mN-1} \Big(\sum_{l=0}^{N-1} x(l) \omega_{mN}^{-kl} \Big) \omega_{mN}^{kj} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{k=0}^{mN-1} \omega_{mN}^{k(j-l)} = mN \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \delta_{mN}(j-l) = mN x(j).$$

Значит, $\{\psi_k\}_{k=0}^{mN-1}$ — фрейм в $\mathbb{C}_N$ с константой mN.

ПРИМЕР 3. Обозначим через ψ_k векторы на плоскости, направленные из начала координат в вершины правильного n-угольника, $n \geqslant 3$. В формульном виде

$$\psi_k = \big(\sin \tfrac{2\pi k}{n}, \cos \tfrac{2\pi k}{n} \big), \quad k \in 0 : n-1.$$

Будем считать ψ_k заданными на основном периоде нормированными сигналами из $\mathbb{C}_2$. Покажем, что $\{\psi_k\}_{k=0}^{n-1}$ — фрейм в $\mathbb{C}_2$ с коэффициентом избыточности $\frac{n}{2}$.

Имеем $\langle x, \psi_k \rangle = x(0) \sin \frac{2\pi k}{n} + x(1) \cos \frac{2\pi k}{n}$. Поскольку

$$\sum_{k=0}^{n-1} \big[x(0) \sin \tfrac{2\pi k}{n} + x(1) \cos \tfrac{2\pi k}{n} \big] \sin \tfrac{2\pi k}{n} =$$

$$= \tfrac{1}{2} x(0) \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \cos \tfrac{4\pi k}{n}) + \tfrac{1}{2} x(1) \sum_{k=0}^{n-1} \sin \tfrac{4\pi k}{n},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \big[x(0) \sin \tfrac{2\pi k}{n} + x(1) \cos \tfrac{2\pi k}{n} \big] \cos \tfrac{2\pi k}{n} =$$

$$= \tfrac{1}{2} x(0) \sum_{k=0}^{n-1} \sin \tfrac{4\pi k}{n} + \tfrac{1}{2} x(1) \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \cos \tfrac{4\pi k}{n})$$

и при $n \geqslant 3$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{2k} = n \delta_n(2) = 0,$$

то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \psi_k \rangle\, \psi_k = \tfrac{n}{2} x.$$

Утверждение доказано.

2°. Существует эквивалентное определение жёсткого фрейма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Набор сигналов* $\{\psi_k\}_{k=1}^M$ *является жёстким фреймом в* $\mathbb{C}_N$ *с константой* A *тогда и только тогда, когда для любого сигнала* $x \in \mathbb{C}_N$ *справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{M} \big|\, \langle x, \psi_k \rangle \,\big|^2 \;=\; A\|x\|^2. \tag{2}$$

Доказательство. Равенство (2) следует из (1), если последнее умножить скалярно на x. Проверим, что (1) следует из (2).

Воспользуемся формулами

$$|x(j) + y(j)|^2 = |x(j)|^2 + |y(j)|^2 + 2\mathrm{Re}\big[\, x(j)\overline{y(j)}\,\big],$$
$$|x(j) + iy(j)|^2 = |x(j)|^2 + |y(j)|^2 + 2\mathrm{Im}\big[\, x(j)\overline{y(j)}\,\big].$$

С их помощью легко устанавливается так называемое «тождество поляризации»: при любых $x, y \in \mathbb{C}_N$

$$\langle x, y \rangle \;=\; \tfrac{1}{4}\big[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big]. \tag{3}$$

На основании (2) и (3) получаем

$$x(j) = \langle x, \delta_N(j-\cdot)\rangle = \tfrac{1}{4}\big[\|x+\delta_N(j-\cdot)\|^2 - \|x-\delta_N(j-\cdot)\|^2 +$$
$$+ i\|x+i\delta_N(j-\cdot)\|^2 - i\|x-i\delta_N(j-\cdot)\|^2\big] = \tfrac{1}{4A}\sum_{k=1}^{M}\big[\,|\,\langle x,\psi_k\rangle + \overline{\psi_k(j)}|^2 -$$
$$-|\,\langle x,\psi_k\rangle - \overline{\psi_k(j)}|^2 + i|\,\langle x,\psi_k\rangle + i\overline{\psi_k(j)}|^2 - i|\,\langle x,\psi_k\rangle - i\overline{\psi_k(j)}|^2\big] =$$
$$= \tfrac{1}{A}\sum_{k=1}^{M}\langle x,\psi_k\rangle\,\psi_k(j).$$

Предложение доказано. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если* $\{\psi_k\}_{k=1}^M$ *— жёсткий фрейм с константой* $A = 1$ *и если* $\|\psi_k\| = 1$ *при всех* k*, то система* $\{\psi_k\}_{k=1}^M$ *образует ортонормированный базис в* $\mathbb{C}_N$*. В частности, необходимо* $M = N$*.*

Доказательство. В силу (1) пространство $\mathbb{C}_N$ является линейной оболочкой сигналов $\psi_1, \ldots, \psi_M$. Остаётся проверить попарную ортогональность этих сигналов. Согласно (2)

$$\|\psi_k\|^2 = \sum_{k'=1}^{M}\big|\,\langle \psi_k, \psi_{k'}\rangle\,\big|^2 = \|\psi_k\|^4 + \sum_{k'\neq k}\big|\,\langle \psi_k, \psi_{k'}\rangle\,\big|^2.$$

Поскольку $\|\psi_k\| = 1$, то $\langle \psi_k, \psi_{k'}\rangle = 0$ при $k \neq k'$.

Предложение доказано. □

3°. В пространстве $\mathbb{C}_N$ при чётном N, $N = 2N_1$, рассмотрим $m > 2$ фильтров анализа $\widetilde{g}_0, \widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_{m-1}$ и столько же фильтров синтеза $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$. Фильтры анализа, действуя на сигнал $x \in \mathbb{C}_N$, выдают m сигналов $d_0, d_1, \ldots,$ d_{m-1} из $\mathbb{C}_{N_1}$, таких, что их ДПФ $D_i = \mathcal{F}_{N_1}(d_i)$ связаны с ДПФ $X = \mathcal{F}_N(x)$ сигнала x формулой

$$D_i(k) = \tfrac{1}{2}\big[\overline{\widetilde{g}_i(k)}X(k) + \overline{\widetilde{g}_i(k+N_1)}X(k+N_1)\big], \tag{4}$$
$$k \in 0 : N_1 - 1, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Спектры D_i имеют период N_1. Сигналы d_i определяются с помощью обратного ДПФ

$$d_i \,=\, \mathcal{F}_{N_1}^{-1}(D_i), \quad i \in 0 : m-1.$$

Такое определение d_i равносильно следующему: $d_i(k) = y_i(2k)$, $k \in 0 : N_1 - 1$, где $y_i = \mathcal{F}_N^{-1}(\overline{\widetilde{g}_i}X)$.

Фильтры синтеза $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ реконструируют спектр сигнала x по формуле

$$\widehat{X}(k) \,=\, \sum_{i=0}^{m-1} g_i(k) D_i(k), \quad k \in 0 : N-1. \tag{5}$$

Сигнал $\widehat{x} = \mathcal{F}_N^{-1}(\widehat{X})$ принимается за восстановленный x. Если $\widehat{x} = x$, то набор $\big\{\widetilde{g}_i,\, g_i \,\big|\, i \in 0 : m-1\big\}$ называется *банком фильтров совершенной реконструкции.*

Выведем условие совершенной реконструкции. Перепишем формулу (5) в виде: при $k \in 0 : N_1 - 1$

$$\begin{aligned} \widehat{X}(k) \,&=\, \sum_{i=0}^{m-1} g_i(k) D_i(k), \\ \widehat{X}(k+N_1) \,&=\, \sum_{i=0}^{m-1} g_i(k+N_1) D_i(k). \end{aligned} \tag{6}$$

Матрицы преобразований (4) и (6) обозначим $\widetilde{P}(k)$ и $P(k)$ соответственно, так что

$$\widetilde{P}(k) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \overline{\widetilde{g}_0(k)} & \overline{\widetilde{g}_0(k+N_1)} \\ \overline{\widetilde{g}_1(k)} & \overline{\widetilde{g}_1(k+N_1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \overline{\widetilde{g}_{m-1}(k)} & \overline{\widetilde{g}_{m-1}(k+N_1)} \end{bmatrix},$$

$$P(k) = \begin{bmatrix} g_0(k) & g_1(k) & \ldots & g_{m-1}(k) \\ g_0(k+N_1) & g_1(k+N_1) & \ldots & g_{m-1}(k+N_1) \end{bmatrix}.$$

Равенство $\widehat{X} = X$, равносильное $\widehat{x} = x$, выполняется тогда и только тогда, когда

$$P(k)\widetilde{P}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{7}$$

4°. Введём сигналы

$$\psi_i \;=\; \mathcal{F}_N^{-1}(g_i), \quad i \in 0 : m-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо разложение*

$$\widehat{x}(j) \;=\; \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N_1-1} d_i(k)\psi_i(j-2k), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим $x_i = \mathcal{F}_N^{-1}(g_i D_i)$. Тогда

$$\widehat{x} = x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}.$$

По определению $\mathcal{F}_N^{-1}$ имеем

$$x_i(j) \;=\; \tfrac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} g_i(l) D_i(l) \omega_N^{lj}\,.$$

Поскольку $D_i(l) = \sum\limits_{k=0}^{N_1-1} d_i(k)\omega_{N_1}^{-lk}$ и $\omega_{N_1}^{-lk} = \omega_N^{-2lk}$, то

$$x_i(j) = \sum_{k=0}^{N_1-1} d_i(k) \Bigl\{ \tfrac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} g_i(l)\omega_N^{l(j-2k)} \Bigr\} = \sum_{k=0}^{N_1-1} d_i(k)\psi_i(j-2k).$$

Суммируя по i от 0 до $m-1$, приходим к (8). □

Разложение (8) будет фреймовым, если

$$d_i(k) = \langle x, \psi_i(\cdot - 2k) \rangle\,, \quad i \in 0 : m-1, \quad k \in 0 : N_1 - 1. \tag{9}$$

Выясним, когда выполняется это условие. Так как

$$\bigl[\mathcal{F}_N(\psi_i(\cdot - 2k))\bigr](l) = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_i(j-2k)\omega_N^{-l(j-2k)-2lk} = \omega_{N_1}^{-lk} g_i(l),$$

то по обобщённому равенству Парсеваля

$$\langle x, \psi_i(\cdot - 2k) \rangle \;=\; \tfrac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l)\overline{g_i(l)}\omega_{N_1}^{lk}.$$

Вместе с тем, согласно (4)

$$d_i(k) = \tfrac{1}{2N_1} \sum_{l=0}^{N_1-1} \bigl[\overline{\widetilde{g}_i(l)} X(l) + \overline{\widetilde{g}_i(l+N_1)} X(l+N_1)\bigr]\omega_{N_1}^{lk} =$$

$$= \tfrac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \overline{\widetilde{g}_i(l)} X(l)\omega_{N_1}^{lk}.$$

Для справедливости равенства (9) при всех $x \in \mathbb{C}_N$ или, что эквивалентно, равенства

$$\tfrac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \bigl[\overline{\widetilde{g}_i(l)} - \overline{g_i(l)}\bigr] X(l)\omega_{N_1}^{kl} = 0, \quad i \in 0 : m-1, \quad k \in 0 : N_1 - 1,$$

при всех $X \in \mathbb{C}_N$ необходимо и достаточно, чтобы

$$g_i = \widetilde{g}_i\,, \quad i \in 0 : m-1, \tag{10}$$

т. е. чтобы фильтры синтеза совпадали с фильтрами анализа.

Приходим к следующему заключению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При выполнении условия* (10) *и условия совершенной реконструкции* (7) *любой сигнал* $x \in \mathbb{C}_N$ *можно представить в виде*

$$x = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \psi_i(\cdot - 2k)\rangle\, \psi_i(\cdot - 2k). \tag{11}$$

Таким образом, система сигналов $\bigl\{\psi_i(j-2k)\bigr\}$ является жёстким фреймом с константой $A = 1$.

Напомним, что $m > 2$. В силу предложения 2 хотя бы одна из норм $\|\psi_i\|$ отлична от единицы.

5°. Рассмотрим важный частный случай.

По-прежнему считаем, что N чётно, $N = 2N_1$. Пусть $m = 3$. Фильтры, соответствующие трём каналам, традиционно обозначаются h, g_1, g_2. Условия (7) и (10) в данном случае примут вид

$$\bigl|h(k)\bigr|^2 + \bigl|g_1(k)\bigr|^2 + \bigl|g_2(k)\bigr|^2 = 2, \quad k \in 0 : N-1, \tag{12}$$

$$h(k)\overline{h(k+N_1)} + g_1(k)\overline{g_1(k+N_1)} + g_2(k)\overline{g_2(k+N_1)} = 0, \quad k \in 0 : N_1 - 1. \tag{13}$$

Построим фильтры h, g_1, g_2, удовлетворяющие соотношениям (12), (13).

Возьмём нечётное число r и положим

$$c = \left(\cos\tfrac{\pi k}{N}\right)^{2r}, \quad s = \left(\sin\tfrac{\pi k}{N}\right)^{2r},$$
$$h(k) = \tfrac{\sqrt{2}\,c}{c+s}, \quad g_1(k) = \tfrac{\sqrt{2}\,s}{c+s}. \tag{14}$$

Функция h является аналогом известного фильтра Баттерворта [3].

Фильтр g_2 в силу (12) должен удовлетворять условию

$$\left|g_2(k)\right|^2 = 2 - \tfrac{2c^2+2s^2}{(c+s)^2} = \tfrac{4}{(c+s)^2}\left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{2\pi k}{N}\right)^{2r}.$$

В качестве g_2 возьмём

$$g_2(k) \;=\; \tfrac{2}{c+s}\left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{2\pi k}{N}\right)^{r}. \tag{15}$$

Отметим, что $g_2 \in \mathbb{C}_N$ и $g_2(k+N_1) = -g_2(k)$ при всех k в силу нечётности r.

Фильтры (14), (15) удовлетворяют соотношению (12) по построению. Непосредственно проверяется и выполнение соотношения (13):

$$\tfrac{2cs}{(c+s)^2} + \tfrac{2sc}{(c+s)^2} - \left(2 - \tfrac{2c^2+2s^2}{(c+s)^2}\right) = 0.$$

Обозначим $\varphi = \mathcal{F}_N^{-1}(h)$, $\psi = \mathcal{F}_N^{-1}(g_1)$, $\eta = \mathcal{F}_N^{-1}(g_2)$. В силу предложения 4 любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$\begin{gathered} x \;=\; \sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \varphi(\cdot-2k)\rangle\, \varphi(\cdot-2k) + \sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \psi(\cdot-2k)\rangle\, \psi(\cdot-2k) + \\ + \sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \eta(\cdot-2k)\rangle\, \eta(\cdot-2k)\,. \end{gathered} \tag{16}$$

Поскольку фильтры h и g_1 вещественные и чётные, то такими же будут сигналы φ и ψ. Фильтр g_2 — вещественный и нечётный. Это обеспечивает чётность и чистую мнимость сигнала η. Обозначим $\theta = \operatorname{Im}\eta$, так что $\eta = i\theta$. Сигнал θ является вещественным и нечётным. Нечётность проверяется так:

$$\theta(-j) \;=\; \operatorname{Im}\eta(-j) \;=\; \operatorname{Im}\overline{\eta(j)} \;=\; -\theta(j).$$

На рис. 1 слева изображены фильтры h, g_1, g_2 вида (14), (15), справа — соответствующие вейвлеты φ, ψ, θ при $r=3$, $N=128$.

Отметим, что

$$\langle x, \eta(\cdot-2k)\rangle\, \eta(\cdot-2k) = \langle x, \theta(\cdot-2k)\rangle\, \theta(\cdot-2k),$$

поэтому последнюю сумму в правой части разложения (16) можно заменить суммой

$$\sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \theta(\cdot-2k)\rangle\, \theta(\cdot-2k)\,.$$

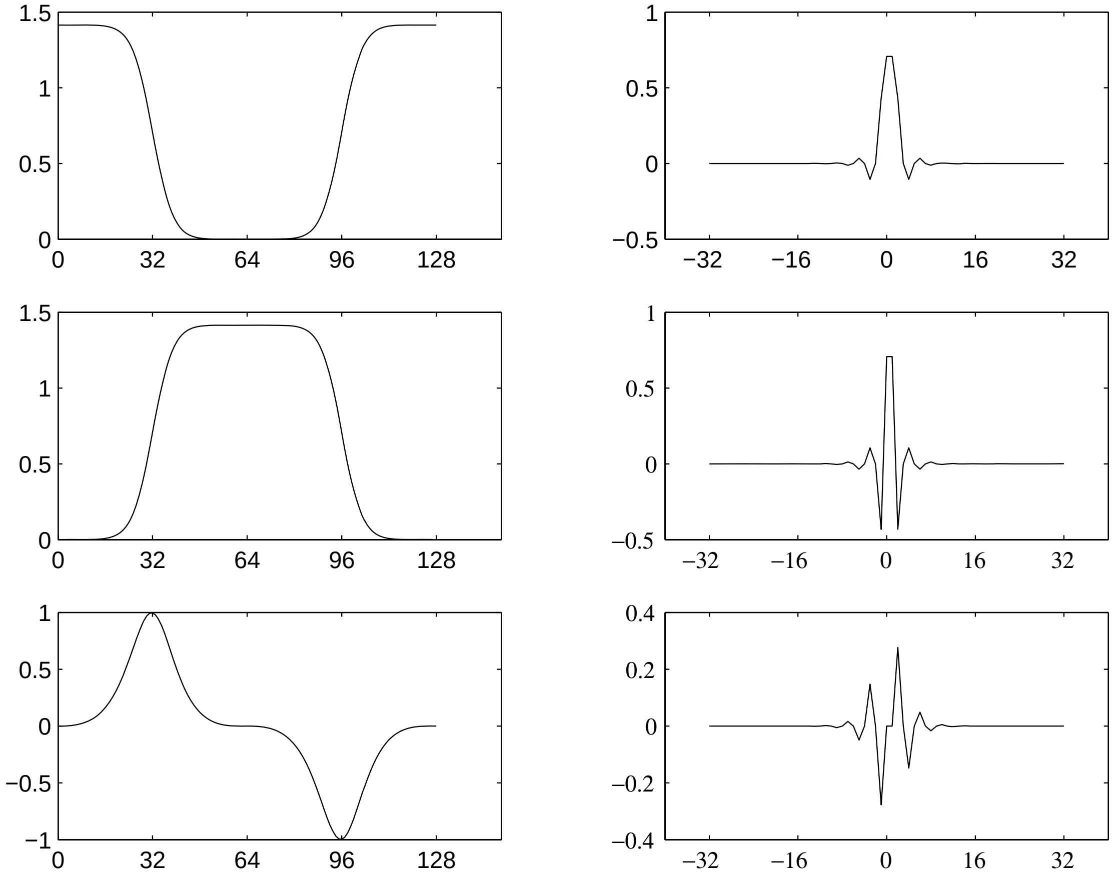

Рис. 1. Фильтры h, g_1, g_2 (слева) и соответствующие вейвлеты φ, ψ, θ (справа) при $r = 3$, $N = 128$.

6°. Из (12) следует, что

$$\|h\|^2 + \|g_1\|^2 + \|g_2\|^2 = 2N.$$

В силу равенства Парсеваля

$$\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\theta\|^2 = 2.$$

В примере, изображённом на рисунке, $\|\varphi\|^2 = \|\psi\|^2 = 0.898$, $\|\theta\|^2 = 0.204$. Обращает на себя внимание малость нормы θ по сравнению с нормами φ и ψ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.

2. Жёлудев В. А., Певный А. Б. *Дискретные периодические фреймы* // Вестник Сыктывкарского Университета. 2006. Вып. 6. С. 87–94.

3. Жёлудев В. А., Певный А. Б. *Вейвлетное преобразование Баттерворта и его реализация с помощью рекурсивных фильтров* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 4. С. 607–618.