ТЕОРЕМА ОБ ОТСЧЁТАХ В ДИСКРЕТНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ*

В. Н. Малозёмов А. Н. Сабаев
malv@gamma.math.spbu.ru

7 февраля 2006 г.

1°. Пусть $N = mn$, где $n \geqslant 2$, и μ, ν — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant \mu < \nu \leqslant N-1\,, \qquad \nu - \mu + 1 = N - m\,. \tag{1}$$

Введём функцию

$$h_m(j) = \frac{1}{m} \sum_{k=\mu-m}^{\mu-1} \omega_N^{kj}\,, \qquad j \in \mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

ТЕОРЕМА 1. *Если спектр Фурье X сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ равен нулю на множестве $\mu : \nu$, то*

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{m-1} x(ln)\, h_m(j - ln), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Доказательство. Имеем

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k+\nu+1)\, \omega_N^{(k+\nu+1)j} =$$

$$= \frac{1}{N}\, \omega_N^{(\nu+1)j} \sum_{k=0}^{m-1} X(k+\nu+1)\, \omega_N^{kj}\,. \tag{4}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Мы воспользовались тем, что при изменении k от m до $N-1$ индекс $k+\nu+1$ изменяется в силу (1) от $N+\mu$ до $N+\nu$. Далее

$$n\,\omega_m^{-(\nu+1)l}\,x(ln)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}X(k+\nu+1)\,\omega_m^{kl}\,,\qquad l\in 0:m-1\,.$$

Отсюда следует, что

$$X(k+\nu+1)=n\sum_{l=0}^{m-1}x(ln)\,\omega_m^{-l(k+\nu+1)}\,,\qquad k\in 0:m-1\,.$$

Подставляя это в (4) и меняя порядок суммирования, получаем

$$x(j)=\sum_{l=0}^{m-1}x(ln)\left[\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\omega_N^{(k+\nu+1)(j-ln)}\right].$$

Отметим, что в силу (1)

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\omega_N^{(k+\nu+1)j}=\frac{1}{m}\sum_{k=\nu+1-N}^{m+\nu-N}\omega_N^{kj}=\frac{1}{m}\sum_{k=\mu-m}^{\mu-1}\omega_N^{kj}=h_m(j)\,,$$

поэтому

$$x(j)=\sum_{l=0}^{m-1}x(ln)\,h_m(j-ln)\,.$$

Теорема доказана. □

Нетрудно проверить, что ядро $h_m(j)$ обладает свойством

$$h_m(ln)=\delta_m(l)\,,\qquad l\in\mathbb{Z}\,. \tag{5}$$

Действительно,

$$h_m(ln)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\omega_m^{(k+\nu+1)l}=\omega_m^{(\nu+1)l}\,\delta_m(l)=\delta_m(l)\,.$$

2°. Рассмотрим частный случай $\nu=N-\mu$. В силу (1), $m=2\mu-1$. Формула (2) принимает вид

$$h_m(j)=\frac{1}{m}\sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1}\omega_N^{kj}\,. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 2. *Ядро* (6) *допускает представление*

$$h_m(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0, \\ \dfrac{\sin(\pi j/n)}{m \sin(\pi j/N)} & \text{при } j \in 1 : N-1. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. При $j = 0$ равенство (7) очевидно.

Пусть $j \in 1 : N-1$. Тогда

$$\sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{kj} = \frac{\omega_N^{(-\mu+1)j} - \omega_N^{\mu j}}{1 - \omega_N^j} = \omega_N^{(-\mu+1)j} \, \frac{1 - \omega_n^j}{1 - \omega_N^j}\,.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 1 - \omega_n^j &= \bigl(1 - \cos(2\pi j/n)\bigr) - i \sin(2\pi j/n) = \\ &= -2i \sin(\pi j/n)\bigl[\cos(\pi j/n) + i \sin(\pi j/n)\bigr] = \\ &= -2i \sin(\pi j/n) \omega_{2n}^j \end{aligned}$$

и, аналогично

$$1 - \omega_N^j = -2i \sin(\pi j/N)\, \omega_{2N}^j\,,$$

то при $j \in 1 : N-1$

$$\frac{1 - \omega_n^j}{1 - \omega_N^j} = \frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)}\, \omega_{2N}^{(m-1)j}\,. \tag{8}$$

Остаётся учесть, что

$$\omega_{2N}^{(m-1)j} = \omega_{2N}^{2(\mu-1)j} = \omega_N^{(\mu-1)j}\,.$$

Теорема доказана. $\square$

3°. Рассмотрим ещё один частный случай $\nu = N - \mu - 1$. В силу (1), $m = 2\mu$. Формула (2) принимает вид

$$\begin{aligned} h_m(j) &= \frac{1}{m} \sum_{k=-\mu}^{\mu-1} \omega_N^{kj} = \frac{1}{m} \Bigl[\omega_N^{-\mu j} + \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{kj} \Bigr] = \\ &= \frac{1}{m} \Bigl[\cos \frac{\pi j}{n} + \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{kj} \Bigr] - \frac{i}{m} \sin \frac{\pi j}{n}\,. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\widetilde{h}_m(j) = \frac{1}{m} \Bigl[\cos \frac{\pi j}{n} + \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_m^{kj} \Bigr].$$

Тогда

$$h_m(j) = \widetilde{h}_m(j) - \frac{i}{m} \sin \frac{\pi j}{n}\,. \tag{9}$$

ТЕОРЕМА 3. *Ядро $\widetilde{h}_m(j)$ допускает представление*

$$\widetilde{h}_m(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0, \\ \dfrac{1}{m}\,\sin\dfrac{\pi j}{n}\,\operatorname{ctg}\dfrac{\pi j}{N} & \text{при } j \in 1 : N-1. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. При $j = 0$ равенство (10) очевидно.

Пусть $j \in 1 : N-1$. Имеем

$$\sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{kj} = \frac{\omega_N^{(-\mu+1)j} - \omega_N^{\mu j}}{1-\omega_N^j} = \omega_N^{-\mu j}\,\frac{\omega_N^j - \omega_n^j}{1-\omega_N^j} = -\omega_{2n}^{-j} + \omega_{2n}^{-j}\,\frac{1-\omega_n^j}{1-\omega_N^j}\,.$$

Воспользуемся формулой (8). Получим

$$\sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{kj} = -\omega_{2n}^{-j} + \omega_{2N}^{-j}\,\frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)} =$$

$$= -\cos\frac{\pi j}{n} + i\sin\frac{\pi j}{n} + \Big(\cos\frac{\pi j}{N} - i\sin\frac{\pi j}{N}\Big)\frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)} =$$

$$= -\cos\frac{\pi j}{n} + \cos\frac{\pi j}{N}\,\frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)}\,.$$

Мнимая часть оказалась равной нулю. Последнюю формулу перепишем в виде

$$\cos\frac{\pi j}{n} + \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{kj} = \sin\frac{\pi j}{n}\,\operatorname{ctg}\frac{\pi j}{N}\,.$$

Поделив на m, придем к соотношению

$$\widetilde{h}_m(j) = \frac{1}{m}\,\sin\frac{\pi j}{n}\,\operatorname{ctg}\frac{\pi j}{N}\,.$$

Теорема доказана. □

Из (9) и (5) (а также из (10)) следует равенство

$$\widetilde{h}_m(ln) = \delta_m(l)\,, \qquad l \in \mathbb{Z}\,. \tag{11}$$

4°. Теорема об отсчётах при $\nu = N - \mu$ (при $m = 2\mu - 1$) связана с интерполяционной задачей

$$\begin{aligned} x(ln) &= z(l)\,, && l \in 0 : m-1\,; \\ X(k) &= 0\,, && k \in \mu : N-\mu\,. \end{aligned} \tag{12}$$

где $z(l)$ — произвольные числа (вообще говоря, комплексные).

ТЕОРЕМА 4. *Единственным решением задачи* (12) *является сигнал*

$$x(j) = \sum_{l=0}^{m-1} z(l)\, h_m(j - ln)\,.$$

Ядро h_m *определяется формулами* (6), (7).

Доказательство. Условия (12) представляют собой систему из N линейных уравнений с N неизвестными $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$. Рассмотрим однородную систему

$$\begin{aligned} x(ln) &= 0\,, \qquad l \in 0 : m-1\,,\\ X(k) &= 0\,, \qquad k \in \mu : N-\mu\,. \end{aligned}$$

Согласно теореме об отсчётах она имеет только нулевое решение. Значит система (12) однозначно разрешима при любых $z(l)$. Теорема доказана. □

Важно отметить, что при вещественных $z(l)$ интерполяционный сигнал $x(j)$ также вещественный.

5°. Обратимся к случаю $\nu = N - \mu - 1$, когда $m = 2\mu$.

ТЕОРЕМА 5. *Сигнал*

$$x(j) = \sum_{l=0}^{m-1} z(l)\, \widetilde{h}_m(j - ln)\,,$$

где ядро $\widetilde{h}_m$ *определяется формулой* (10), *удовлетворяет интерполяционным условиям*

$$x(ln) = z(l)\,, \qquad l \in 0 : m-1\,.$$

Доказательство. Согласно (11)

$$x(ln) = \sum_{l'=0}^{m-1} z(l')\, \widetilde{h}_m\big((l-l')\,n\big) = \sum_{l'=0}^{m-1} z(l')\, \delta_m(l-l') = z(l)\,.$$

Теорема доказана. □

И здесь вещественные зачения $z(l)$ порождают вещественный интерполяционный сигнал $x(j)$.

6°. Задачи интерполяции в пространстве $\mathbb{C}_N$ (и, в частности, задачи оптимальной интерполяции) рассматривались в работах [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бер М. Г., Малозёмов В. Н. *Об интерполяции дискретных периодических данных* // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 28. № 4. С. 60–68.

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.

3. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Части 1–3. СПб.: НИИММ, 2003. 288 с.