

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ
дискретного гармонического анализа
и геометрического моделирования

Под редакцией проф. В. Н. Малозёмова

Санкт-Петербург
2009 г.

АННОТАЦИЯ

Избранные главы дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования. Под ред. проф. В. Н. Малозёмова. 2009. 584 с.

Дискретный гармонический анализ (Discrete Harmonic Analysis, ДГА) — относительно молодое направление в прикладной математике, ориентированное на цифровую обработку сигналов. В ДГА используются, в основном, дискретное преобразование Фурье, дискретные вейвлетные преобразования и циклические свёртки.

Геометрическое моделирование (Computer Aided Geometric Design, САГД) связано с построением кривых и поверхностей по ограниченной информации. К популярным средствам САГД относятся кривые и поверхности Безье и поверхности Кунса.

Для совершенствования базовых знаний в области ДГА & САГД и для дальнейшего развития этих направлений на математико-механическом факультете СПбГУ в 2004 году был организован семинар. Основные итоги работы семинара за 2004–2008 годы подводятся в этой книге.

Для студентов старших курсов и аспирантов математических специальностей и специалистов в области цифровой обработки сигналов и геометрического моделирования.

*Тот, кто знает Учение,
уступает тому, кто находит
в нём удовольствие.
Конфуций*

Содержание

Предисловие	9
Основные обозначения	11

2004

<i>В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков</i> ПЕРЕСТАНОВКИ И КРОНЕКЕРОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ	12
<i>В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков</i> ФАКТОРИЗАЦИЯ КУЛИ-ТЬЮКИ МАТРИЦЫ ФУРЬЕ	20
<i>В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков</i> ФАКТОРИЗАЦИЯ ГУДА МАТРИЦЫ ФУРЬЕ	30
<i>В. Н. Малозёмов</i> ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ КОДИРОВАНИЕ ИНДЕКСОВ	35
<i>В. Н. Малозёмов</i> О СПЕКТРЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ УОЛША	41
<i>В. Н. Малозёмов</i> РЯДЫ ФУРЬЕ И ДПФ	48
<i>В. Н. Малозёмов, С. В. Рыбин</i> РЕКУРРЕНТНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	50
<i>М. И. Григорьев, В. Н. Малозёмов, А. Н. Сергеев</i> ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА И СОСТАВНЫЕ КРИВЫЕ БЕЗЪЕ	53

2005

<i>В. Н. Малозёмов, Н. А. Селянинова</i> ПРЯМАЯ ЛИФТИНГОВАЯ СХЕМА	64
<i>В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный</i> ПРОГРАММИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИКА	74

<i>В. Н. Малозёмов, С. В. Рыбин</i> ЧАСТОТНЫЙ КОНВЕРТЕР	91
<i>В. Н. Малозёмов</i> ПОДСЧЁТ КОЛИЧЕСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ БПФ	94
<i>В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков</i> БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ СВЁРТОК МАЛЫХ ПОРЯДКОВ	100
<i>О. В. Просеков</i> БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ МАЛЫХ ПОРЯДКОВ	112

2006

<i>В. Н. Малозёмов, А. Н. Сабаев</i> ТЕОРЕМА ОБ ОТСЧЁТАХ В ДИСКРЕТНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ	141
<i>В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный</i> ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ	147
<i>В. Н. Малозёмов, Н. А. Селянинова</i> ДВОЙСТВЕННАЯ ЛИФТИНГОВАЯ СХЕМА	156
<i>А. Б. Певный</i> ФРЕЙМЫ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ФРЕЙМОВОГО ПОТЕНЦИАЛА	166
<i>В. А. Жёлудев, В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный</i> БАНКИ ФИЛЬТРОВ И ФРЕЙМЫ	173
<i>В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков</i> ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ РЕВЕРСНЫХ ПЕРЕСТАНОВОК	187
<i>В. Н. Малозёмов</i> РАЗБИЕНИЕ КРИВЫХ БЕЗЪЕ	195
<i>В. Н. Малозёмов</i> ВАРИАЦИИ КРИВЫХ БЕЗЪЕ	202
<i>Г. Н. Малолеткин</i> ВЫЧИСЛЕНИЕ ДПФ ЛЮБОЙ ДЛИНЫ	208
<i>В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков</i> ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ПРОСТЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ	212
<i>В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков</i> ОБЩИЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ДПФ	218

<i>В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков</i> ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ ФУРЬЕ . . .	224
<i>О. В. Просеков</i> ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ МНОГОМЕРНОГО БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ	233
<i>В. Н. Малозёмов</i> РАЗДЕЛЁННЫЕ РАЗНОСТИ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ	241
<i>Н. В. Чашников</i> БИЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА И ПОВЕРХНОСТИ БЕЗЬЕ	248
<i>В. Н. Малозёмов</i> ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯРНЫХ ФОРМ	258
<i>И. В. Агафонова</i> ФАКТОРИЗАЦИЯ БОЛЬШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ И КРИПТОГРАФИЯ	265
<i>М. И. Григорьев, В. Н. Малозёмов, А. Н. Сергеев</i> МОЖНО ЛИ ПОСТРОИТЬ ОКРУЖНОСТЬ С ПОМОЩЬЮ КРИВЫХ БЕЗЬЕ?	281

2007

<i>В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный</i> ФРЕЙМ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ	288
<i>В. Н. Малозёмов, Н. В. Чашников</i> БИКУБИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА	295
<i>Н. В. Чашников</i> СОСТАВНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА . .	303
<i>М. И. Григорьев</i> ПОСТРОЕНИЕ СФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКТИВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ БЕЗЬЕ	309
<i>В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный</i> СИСТЕМЫ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ И ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ	315
<i>И. А. Капелюхин, В. Н. Малозёмов, А. Н. Сергеев</i> ПОВЕРХНОСТИ БЕЗЬЕ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ. ПЕРЕПАРАМЕТРИЗАЦИЯ	321
<i>М. И. Григорьев, В. Н. Малозёмов</i> ПОЛЕ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ БЕЗЬЕ	328

<i>М. Н. Истомина</i> ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА В СЛУЧАЕ УТРАТЫ ОДНОГО ФРЕЙМОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА	334
<i>А. Б. Певный</i> МАКСИМАЛЬНАЯ ИЗБЫТОЧНОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФРЕЙМОВ	337
<i>В. Н. Малозёмов, А. Н. Сергеев, Н. В. Чашников</i> ПОВЕРХНОСТИ КУНСА НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ	341
<i>В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный</i> ЧЕТВЁРТОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЁСТКОГО ФРЕЙМА	347
<i>М. И. Григорьев</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ	352
<i>В. Н. Малозёмов, Н. А. Соловьёва</i> ДВОЙСТВЕННЫЕ ФРЕЙМЫ	357
<i>В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков</i> КРОНЕКЕРОВО УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ И КОММУТАТИВНОСТЬ	361
<i>Н. В. Чашников</i> ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ КАК ПОВЕРХНОСТЬ КУНСА	364
<i>В. Н. Малозёмов, Д. А. Хорохонов, Н. В. Чашников</i> ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ С ВЕКТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	371
<i>М. И. Григорьев</i> ОБОБЩЁННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ	382
<i>В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный</i> РАВНОУГОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ И ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ	389
<i>А. Н. Сабеев</i> ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ КЛЕНШОУ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЁХ- И ПЯТИДИАГОНАЛЬНЫМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ МАТРИЦАМИ	397
<i>А. М. Дурягин, Н. А. Соловьёва</i> ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ	406
<i>Н. В. Чашников</i> СМЕШИВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ	411
<i>А. М. Дурягин, А. Б. Певный</i> ФРЕЙМЫ ГРАССМАНА	423

<i>И. В. Агафонова</i> КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ	428
--	-----

2008

<i>В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков, А. Н. Сабает</i> ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ ВИЛЕНКИНА-КРЕСТЕНСОНА	452
<i>В. Н. Малозёмов, Н. А. Соловьёва</i> О УНИТАРНЫХ МАТРИЦАХ И СИНГУЛЯРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ	460
<i>В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный</i> СИСТЕМ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ ПРИ $m > n + 1$ НЕ СУЩЕСТВУЕТ	464
<i>Н. А. Соловьёва</i> О ЖЁСТКИХ ФРЕЙМАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА	466
<i>Н. В. Чашников</i> СОСТАВНЫЕ И ОБОБЩЁННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА	468
<i>В. В. Максименко, А. Б. Певный</i> СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОУГОЛЬНЫХ ЖЁСТКИХ ФРЕЙМОВ	477
<i>А. М. Дурагин</i> МАКСИМАЛЬНАЯ ИЗБЫТОЧНОСТЬ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФРЕЙМОВ	484
<i>М. И. Григорьев</i> ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ	492
<i>М. И. Григорьев, А. Н. Сергеев</i> ПОЛЯРНАЯ ФОРМА ПОЛИНОМОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ	500
<i>Н. А. Соловьёва</i> ОБОБЩЁННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ	507
<i>М. И. Григорьев, В. Н. Малозёмов, А. Н. Сергеев</i> ОСНОВНАЯ ЛЕММА ТЕОРИИ ПОЛЯРНЫХ ФОРМ ПОЛИНОМОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ	516
<i>В. Н. Малозёмов, С. М. Машарский</i> АНСАМБЛИ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ	522
<i>Н. В. Чашников</i> ПОСТРОЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ	529

<i>М. И. Григорьев, В. Н. Малозёмов</i> ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЁННЫХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА	534
<i>М. Н. Истомина, А. Б. Певный</i> МЕТОД ПОПЕРЕМЕННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РАВНОУГОЛЬНЫХ ЖЁСТКИХ ФРЕЙМОВ	542
<i>А. Н. Сабаев</i> ЗАМЕЧАНИЕ О СИСТЕМАХ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ	551
<i>М. И. Григорьев</i> ПОВЕРХНОСТИ БЕЗЬЕ НА ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКЕ И ГЛАДКИЕ СОСТАВНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ	553
<i>Н. В. Чашников</i> ПОВЕРХНОСТИ КУНСА НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	564
<i>В. Н. Малозёмов</i> НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ЖЁСТКИХ ФРЕЙМАХ	575
Список участников семинара	582
Предметный указатель	583

Предисловие

В данной книге подводятся итоги работы семинара по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию при математико-механическом факультете СПбГУ за 2004–2008 годы. Семинар был организован в январе 2004 года, сразу после опубликования книги:

Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа*. Части 1-3. СПб., НИИММ СПбГУ, 2003. 288 с.

Перед участниками семинара ставилась задача дальнейшего развития дискретного гармонического анализа (Discrete Harmonic Analysis, DHA). Вскоре проблематику семинара пришлось расширить, включив в неё геометрическое моделирование (Computer Aided Geometric Design, CAGD). Вопросы визуализации в наше время игнорировать нельзя. Семинар стал называться «DHA & CAGD».

С первого взгляда, объединение двух указанных направлений выглядит искусственным, однако, как выяснилось, дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами являются адекватным математическим аппаратом при моделировании замкнутых кривых и поверхностей. Так в CAGD вошло дискретное преобразование Фурье.

В работе семинара «DHA & CAGD» принимали участие студенты старших курсов и аспиранты, у которых я был научным руководителем. Со временем к нам присоединилась группа из Сыктывкарского университета, руководимая проф. А. Б. Певным. Список участников семинара приведён в конце книги.

С самого начала было принято принципиальное решение — вести сайт семинара. Его создал и в течение пяти лет поддерживал О. В. Просеков (в 2004 году — аспирант первого курса, ныне — кандидат физ.-мат. наук). Адрес сайта: <http://dha.spb.ru>. На сайте много полезной информации, но наибольшую ценность имеет раздел «Избранные доклады». Из докладов этого раздела и составлена книга.

Доклады приведены в хронологическом порядке. По ним можно проследить, как формируется «язык семинара», как аспиранты становятся кандидатами наук. Содержание каждого доклада относительно независимо, что облегчает чтение.

Жанр данной книги определить непросто. Естественно, авторы докладов стремились получить новые результаты. Но для этого требовалось навести порядок в базовых знаниях, представить их в виде, удобном для непосредственного применения. Например, чтобы заниматься быстрым преобразованием Фурье, нужно разобраться в кронекеровом умножении матриц и свойствах специальных матриц перестановок. Добиться успеха в теории кривых и поверхностей Безье невозможно без углубления в свойства полиномов в форме Бернштейна от одной и двух переменных. Вопросам совершенствования

базовых знаний на семинаре уделялось большое внимание, что нашло отражение в соответствующих докладах. В этом плане книга является учебным изданием. Вместе с тем, книга содержит и новые результаты. Они касаются параметрических вариантов быстрого преобразования Фурье, вейвлетных разложений дискретных периодических сигналов, равноугольных жёстких фреймов (в частности, фреймов Мерседес-Бенц в n -мерном пространстве), составных поверхностей Безье и Кунса. В предметном указателе более подробно представлены объекты исследований. Так что книга имеет и научный характер. Можно сказать, что данная книга относится к жанру учебно-научной литературы.

Основной труд по подготовке этого издания взял на себя М. И. Григорьев, который как участник семинара тоже прошёл путь от аспиранта первого курса до кандидата физ.-мат. наук.

Надеюсь, что книга будет интересна широкому кругу читателей, и прежде всего студентам, выбирающим тему научного исследования.

Июнь 2009 г.

В. Н. Малозёмов

Список участников семинара

- Агафонова Ирина Витальевна (кандидат физ.-мат. наук, доцент)
ivagafonova@home.eltel.net
- Григорьев Михаил Игоревич (кандидат физ.-мат. наук)
m_grigoriev@list.ru
- Дурягин Александр Максимович (аспирант)
duriagin@syktsu.ru
- Жёлудев Валерий Александрович (доктор физ.-мат. наук, профессор)
zhel@post.tau.ac.il
- Истомина Марина Николаевна (аспирантка)
istomina@syktsu.ru
- Капелюхин Иван Александрович (студент)
i_kapelyuhin@mail.ru
- Максименко Владимир Валерьевич (аспирант)
хурупр@хурупр.com
- Малозёмов Василий Николаевич (доктор физ.-мат. наук, профессор)
malv@math.spbu.ru
- Машарский Сергей Михайлович (кандидат физ.-мат. наук, доцент)
smash@scientist.com
- Певный Александр Борисович (доктор физ.-мат. наук, профессор)
pevnyi@syktsu.ru
- Просеков Олег Валерьевич (кандидат физ.-мат. наук)
sc2@pisem.net
- Рыбин Сергей Витальевич (кандидат физ.-мат. наук, доцент)
rsvvm2leti@yandex.ru
- Сабаяев Анатолий Николаевич (аспирант)
- Сергеев Александр Николаевич (кандидат физ.-мат. наук, доцент)
aser57@mail.ru
- Соловьёва (Селянинова) Наталья Анатольевна (аспирантка)
vinyo@mail.ru
- Чашников Николай Викторович (аспирант)
nik239@list.ru
- Хорохонов Даниил Александрович (студент)
d.khorokhonov@mail.ru

Предметный указатель

А

Алгоритм Гёрцеля 81
Алгоритм Кастельжо 202, 557
Алгоритм квадратичного решета
268
Ансамбли сигналов 522

Б

Базисные полиномы Бернштейна
53, 492
Банки фильтров 173
Бент-функции 439
Булевы функции 431
-- , автокорреляция 443
-- , нелинейность 433, 437
-- , производная по направлению
440
Быстрое преобразование Фурье 112
--- многомерное 233

Д

Дискретное лифтинговое
преобразование, прямое 67
--- , двойственное 159
Дискретное преобразование Фурье
11, 208
Дискретные периодические
сплайны 371, 529
Дискретные функции
Виленкина-Крестенсона 452
Дискретные функции Уолша 41

И

Избыточность фрейма 337, 484
Интерполяция по полюсам 261, 505

К

Код китайский 37

-- руританский 37
-- самосопряжённый 36
-- смешанный 187
Кодирование индексов
параметрическое 35
Конечные разности 56, 493, 558
Кривые Безье 55, 195, 202
-- замкнутые 328
-- обобщённые 534
-- проективные 281
-- составные 58
Криптография 265, 428
Кронекерово умножение матриц
12, 361

Л

Лифтинговая схема, прямая 64
-- , двойственная 156

М

Матрица Фурье 20
Матрица вращений 20
Матрицы перестановок 13
Метод наименьших квадратов 50

Н

Нормализованные B -сплайны 371

П

Поверхность Безье 248, 553
-- на треугольнике 321, 345
-- проективная 309
-- составная 558
Поверхность Кунса 248, 295, 364,
412
-- на треугольнике 341, 564
-- обобщённая 468
-- составная 303, 468

Поверхность вращения 352, 364
 -- обобщённая 382
 Полиномы в форме Бернштейна 53
 --- обобщённые 534
 --- от двух переменных 492
 Преобразование Уолша-Адамара
 1-го рода 435
 --- 2-го рода 436
 Процедура включения узла 261,
 505

Р

Равноугольные системы векторов
 389
 Разделённые разности с кратными
 узлами 241
 Рекуррентные соотношения 24, 50,
 54, 77, 160, 191, 202, 213, 225,
 244, 259, 397, 496, 501, 535, 555
 Ряды Фурье 48

С

Сигналы 11
 – дельта-коррелированные 523
 – некоррелированные 522
 Сингулярное разложение матрицы
 460
 Системы Грассмана 423
 Системы Мерседес-Бенц 315, 464,
 551
 Смешивающие функции 411
 Сплайн-интерполяция 65
 -- векторная 376
 Схема Кленшоу 77, 397

Т

Теорема об отсчётах 141
 Теория полярных форм 258
 --- полиномов от двух
 переменных 500

Ф

Факторизация Гуда матрицы
 Фурье 30
 Факторизация Кули-Тьюки
 матрицы Фурье 20
 Факторизация матриц
 перестановок 187
 Факторная база 276
 Фильтр Баттерворта 153, 173
 Фреймовые коэффициенты 334, 406
 Фреймовый потенциал 169, 349
 Фреймы 166, 578
 – гармонические 339, 406, 484
 -- обобщённые 507
 – двойственные 177, 357
 Фреймы Грассмана 423
 Фреймы Мерседес-Бенц 288
 Фреймы Парсевала 360
 Фреймы жёсткие 147, 315, 347, 389,
 466, 575
 -- равноугольные 477, 542

Ц

Циклическая матрица 397
 Циклическая свёртка 100

Ч

Частично бент-функции 447
 Частотный конвертер 91