ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ ШАПИРО*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

И. С. Стояноска
irena.stoyanoska@gmail.com

28 января 2012 г.

Данный доклад является продолжением доклада [1].

1°. Напомним определение полиномов Шапиро:

$$P_0(x) \equiv 1, \quad Q_0(x) \equiv 1$$

и при $m = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} P_{m+1} &= P_m(x) + x^{2^m} Q_m(x), \\ Q_{m+1} &= P_m(x) - x^{2^m} Q_m(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Полином $Q_m(x)$ называется *дополнительным* к полиному $P_m(x)$.

Пусть

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k\, x^k.$$

В [1, 2] приведена явная формула для коэффициентов a_k:

$$a_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1} k_\alpha}, \quad k \in 0 : 2^m - 1,\ m \geqslant 2, \tag{2}$$

при условии, что $k = (k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_0)_2$, $k_\alpha \in \{0, 1\}$.

Обозначим b_k коэффициенты полинома $Q_m(x)$,

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} b_k\, x^k.$$

ТЕОРЕМА 1. *При $m \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$b_k = (-1)^{k_{m-1}} a_k, \quad k \in 0 : 2^m - 1. \tag{3}$$

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Доказательство. Согласно (1) при $m \geqslant 1$ имеем

$$Q_m(x) = P_{m-1}(x) - [P_m(x) - P_{m-1}(x)].$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &b_k = a_k \quad \text{при } k \in 0 : 2^{m-1} - 1, \\ &b_k = -a_k \quad \text{при } k \in 2^{m-1} : 2^m - 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Формула (3) является объединением этих соотношений. $\square$

На основании (2) и (3) получаем явное представление для коэффициентов b_k при $m \geqslant 2$:

$$b_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}k_\alpha + k_{m-1}}, \quad k \in 0 : 2^m - 1.$$

Отметим также, что векторы $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{2^m-1})$ и $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{2^m-1})$ коэффициентов полиномов $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ ортогональны. Действительно, в силу (3)

$$\begin{aligned} \langle a, b\rangle &= \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k b_k = \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^{k_{m-1}} a_k^2 = \\ &= \Bigg(\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} + \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1}\Bigg)(-1)^{k_{m-1}} = 0. \end{aligned}$$

2°. Нам потребуется одно свойство коэффициентов полинома $P_m(x)$.

ЛЕММА 1. *При $m \geqslant 2$ верны соотношения*

$$a_{2^m-1-k} = (-1)^{m+1+k} a_k, \quad k \in 0 : 2^{m-1} - 1; \tag{5}$$

$$a_{2^m-1-k} = (-1)^{m+k} a_k, \qquad k \in 2^{m-1} : 2^m - 1. \tag{6}$$

Доказательство. При $m = 2$ равенства (5) и (6) проверяются непосредственннo. Будем считать, что $m \geqslant 3$.

Сначала обратимся к равенству (5). Пусть $k \in 0 : 2^{m-1} - 1$, $k = (k_{m-2}, \ldots, k_0)_2$. Согласно (2)

$$a_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-2} k_{\alpha-1}\, k_\alpha}.$$

Далее

$$k' := 2^m - 1 - k = (1,\, 1 - k_{m-2}, \ldots, 1 - k_0)_2.$$

(Для проверки можно использовать тот факт, что
$$k+k' = 2^m - 1 = (1,\dots,1)_2.)$$
По формуле (2)
$$\begin{aligned} a_{k'} &= (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-2}(1-k_{\alpha-1})(1-k_\alpha)+1-k_{m-2}} = \\ &= (-1)^{m-1-k_0-2\sum_{\alpha=1}^{m-2}k_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{m-2}k_{\alpha-1}k_\alpha} = (-1)^{m+1+k}a_k. \end{aligned}$$
Равенство (5) установлено.

Равенство (6) выводится с использованием (5). Пусть $k \in 2^{m-1} : 2^m - 1$. Тогда индекс $k' = 2^m-1-k$ принадлежит множеству $0 : 2^{m-1}-1$. Согласно (5) имеем
$$a_{2^m-1-k'} = (-1)^{m+1+k'}a_{k'}$$
или
$$a_{2^m-1-k} = (-1)^{m+k}a_k.$$

Лемма доказана. □

3°. Рассмотрим полиномы Шапиро как функции комлексной переменной z. Особый интерес представляет случай, когда $|z| = 1$.

Следующий результат был получен Г. Шапиро в 1951 году [3].

ТЕОРЕМА 2. *При $m \geqslant 1$ справедливы тождества*
$$P_m(-z) = (-1)^m z^{2^m-1} Q_m(\tfrac{1}{z}), \tag{7}$$
$$Q_m(-z) = (-1)^{m+1} z^{2^m-1} P_m(\tfrac{1}{z}). \tag{8}$$

Обычно эти тождества доказываются по индукции. Мы дадим прямое доказательство.

Начнём с формулы (7). При $m = 1$ её справедливость проверяется непосредственно. Будем считать, что $m \geqslant 2$.

Согласно (4) имеем
$$\begin{aligned} (-1)^m z^{2^m-1}\, Q_m(\tfrac{1}{z}) &= (-1)^m \sum_{k=0}^{2^m-1} b_k\, z^{2^m-1-k} = \\ &= (-1)^m \Bigg[\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} a_k\, z^{2^m-1-k} - \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} a_k\, z^{2^m-1-k}\Bigg]. \end{aligned}$$
Вместе с тем, в силу (6)
$$\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} a_k\, z^{2^m-1-k} = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} a_{2^m-1-k}\, z^k = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} (-1)^{m+k} a_k\, z^k$$

и в силу (5)

$$-\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} a_k\, z^{2^m-1-k} = -\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} a_{2^m-1-k}\, z^k = \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} (-1)^{m+k} a_k\, z^k.$$

Значит,

$$(-1)^m z^{2^m-1}\, Q_m(\tfrac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^k a_k\, z^k = P_m(-z).$$

Справедливость тождества (7) установлена.

Подставим в (7) $-\frac{1}{z}$ вместо z. Получим

$$P_m(\tfrac{1}{z}) = (-1)^m(-\tfrac{1}{z})^{2^m-1} Q_m(-z) = (-1)^{m+1} z^{-2^m+1} Q_m(-z),$$

что равносильно (8).

Теорема доказана. $\square$

4°. Остановимся на одном изящном свойстве коэффициентов полиномов Шапиро, отмеченном в работе [2].

Обозначим $\theta(m)$ количество положительных коэффициентов у $P_m(x)$.

ТЕОРЕМА 3. *При $m \geqslant 0$ выполняются равенства*

$$\theta(2m) = 2^{2m-1} + 2^{m-1}, \tag{9}$$

$$\theta(2m+1) = 2^{2m} + 2^m. \tag{10}$$

Приведём подробное доказательство этого утверждения.

При $m = 0$ формулы (9) и (10) принимают вид $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 2$. Их справедливость очевидна.

Запишем при $m \geqslant 0$ выражение для $P_m(x)$,

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k\, x^k,$$

и для $P_{m+1}(x)$ (см. [1]),

$$P_{m+1}(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k\, x^{2k} + \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^k a_k\, x^{2k+1}. \tag{11}$$

Обозначим через $\theta_0(m)$ количество положительных a_k с чётными индексами и через $\theta_1(m)$ — количество положительных a_k с нечётными индексами. Очевидно, что $\theta(m) = \theta_0(m) + \theta_1(m)$. Кроме того, согласно (11)

$$\theta_0(m+1) = \theta(m) \quad \text{при } m \geqslant 0.$$

Последнее соотношение перепишем в виде

$$\theta_0(m) = \theta(m-1) \quad \text{при } m \geqslant 1. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что при $m \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\theta(m+1) = \theta(m) + \theta_0(m) + [2^{m-1} - \theta_1(m)] = \\ = 2\theta_0(m) + 2^{m-1} = 2\theta(m-1) + 2^{m-1}.\end{aligned}$$

Приходим к рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered}\theta(m+1) - 2\theta(m-1) = 2^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots; \\ \theta(0) = 1, \quad \theta(1) = 2.\end{gathered} \tag{13}$$

Из него можно получить явное выражение для $\theta(m)$.

Разностное уравнение (13) имеет простое частное решение $\hat{\theta}(m) = 2^{m-1}$. Решение однородного уравнения $\theta(m+1) - 2\theta(m-1) = 0$ будем искать в виде $\theta(m) = \lambda^{m+1}$. Величина λ (точнее два её значения) определяются из условия $\lambda^2 - 2 = 0$. Приходим к общему решению уравнения (13)

$$\theta(m) = 2^{m-1} + c_1(\sqrt{2})^{m+1} + c_2(-\sqrt{2})^{m+1}.$$

Константы c_1 и c_2 выберим так, чтобы выполнялись начальные условия

$$\begin{aligned}&1 = \theta(0) = \tfrac{1}{2} + c_1\sqrt{2} - c_1\sqrt{2}, \\ &2 = \theta(1) = 1 + 2c_1 + 2c_2.\end{aligned}$$

Получаем

$$c_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{8}, \quad c_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{8}.$$

Явное выражение для $\theta(m)$ принимает вид

$$\theta(m) = 2^{m-1} + \frac{2+\sqrt{2}}{8}(\sqrt{2})^{m+1} + \frac{2-\sqrt{2}}{8}(-\sqrt{2})^{m+1}.$$

Отсюда очевидным образом следуют равенства (9) и (10).

Теорема доказана. □

СЛЕДСТВИЕ. *При $m \geqslant 0$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned}P_{2m}(1) = 2^m, \qquad P_{2m+1}(1) = 2^{m+1}, \\ P_{2m}(-1) = 2^m, \quad P_{2m+1}(-1) = 0.\end{aligned}$$

При $m = 0$ эти равенства очевидны. При $m \geqslant 1$ нужно воспользоваться тем, что

$$P_m(1) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k = \theta(m) - [2^m - \theta(m)] = 2\theta(m) - 2^m,$$

$$\begin{aligned} P_m(-1) = \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^k a_k &= \theta_0(m) - [2^{m-1} - \theta_0(m)] - \\ &- \left\{\theta_1(m) - [2^{m-1} - \theta_1(m)]\right\} = 2\,[\theta_0(m) - \theta_1(m)] = \\ &= 2\,[\,2\theta_0(m) - \theta(m)] = 2\,[\,2\theta(m-1) - \theta(m)]. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Стояноска И. С. *Полиномы Шапиро и коды Рида-Маллера* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 26 ноября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1126`)

2. Brillhart J., Carlitz L. *Note on the Shapiro polynomials* // Proceedings of the AMS. 1970. Vol. 25. No. 1. P. 114–118.

3. Shapiro H. S. *Extremal problems for polynomials and power series.* Master's thesis. Cambrige, Mass., 1951.