ПРОСТЕЙШИЕ БАЗИСЫ СДВИГОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СИГНАЛОВ*

Н. А. Соловьёва
vinyo@mail.ru

24 марта 2007 г.

1. Предварительные сведения

1.1. Будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{C}_N$ — пространство сигналов (комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$);

$\mathbb{1} = \mathbb{1}(j)$ — сигнал, все отсчёты которого равны единице;

$\delta_N = \delta_N(j)$ — единичный N-периодический импульс (сигнал, у которого $\delta_N(j) = 1$, если j делится на N, и $\delta_N(j) = 0$ в противном случае);

$\omega_N = \exp\big(2\pi i/N\big)$ — корень N-й степени из единицы.

В пространстве $\mathbb{C}_N$ вводится дискретное преобразование Фурье (ДПФ) $\mathcal{F}_N \colon \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$, сопоставляющее сигналу x сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ с отсчётами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \omega_N^{-kj}, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

В частности,

$$\mathcal{F}_N(\delta_N) = \mathbb{1}. \tag{1}$$

Циклической свёрткой сигналов x и y называется сигнал $u = x * y$ с отсчётами

$$u(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, y(j-k), \qquad j \in \mathbb{Z}\,.$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Нам потребуются следующие утверждения [1].

1) Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно представить в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, \delta_N(j-k), \qquad j \in \mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

2) Для любого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ при всех $l \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(j+l) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j). \tag{3}$$

3) Справедлива формула обращения для ДПФ

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}\,. \tag{4}$$

4) Пусть $X = \mathcal{F}_N(x)$, $Y = \mathcal{F}_N(y)$. Тогда

$$\mathcal{F}_N\big(x * y\big) = XY, \tag{5}$$

где справа стоит покомпонентное произведение спектров.

1.2. Сигнал x называется чётным, если $x(-j) = \overline{x}(j)$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для того чтобы сигнал x был чётным, необходимо и достаточно, чтобы его спектр $X = \mathcal{F}_N(x)$ был вещественным.*

Доказательство. Перепишем условие чётности в равносильном виде $x(j) = \overline{x}(-j)$. Формула обращения (4) приводит к эквивалентному тождеству

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \omega_N^{kj} \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} \overline{X}(k)\, \omega_N^{kj},$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда $X(k) = \overline{X}(k)$ при $k \in 0\,{:}\,N{-}1$, т. е. когда спектр X — вещественный. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для того чтобы сигнал x был вещественным, необходимо и достаточно, чтобы его спектр $X = \mathcal{F}_N(x)$ был чётным.*

Доказательство. В силу (4)

$$\overline{x}(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \overline{X}(k)\,\omega_N^{-kj} = \frac{1}{N}\Big[\overline{X}(0) + \sum_{k=1}^{N-1} \overline{X}\big(N-(N-k)\big)\,\omega_N^{(N-k)j}\Big] = $$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \overline{X}(N-k)\,\omega_N^{kj}.$$

Отсюда следует, что равенство $\overline{x} = x$, характеризующее вещественный сигнал, выполняется тогда и только тогда, когда $\overline{X}(N-k) = X(k)$ при $k \in 0 : N-1$, что, в свою очередь, равносильно условию $X(-k) = \overline{X}(k)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. □

Объединив предложения 1 и 2, придём к такому заключению: *критерием вещественности и чётности сигнала x является вещественность и чётность его спектра $X = \mathcal{F}_N(x)$.*

1.3. В пространстве $\mathbb{C}_N$ можно ввести скалярное произведение и норму:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{y}(j)\,, \qquad \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Сдвиг $x(j-k)$ сигнала $x(j)$ как элемент пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $x(\cdot - k)$. Нетрудно проверить, что при всех $k, k' \in 0 : N-1$ выполняется равенство

$$\langle \delta_N(\cdot - k), \delta_N(\cdot - k')\rangle = \delta_N(k-k')\,.$$

Вместе с формулой (2) оно означает, что система сдвигов единичного импульса $\{\delta_N(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$.

2. Циклическая корреляция и базисы сдвигов

2.1. Взаимной корреляцией сигналов x и y называется сигнал R_{xy} с отсчётами

$$R_{xy}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\overline{y}(k-j), \qquad j \in \mathbb{Z}\,.$$

Положим $y_1(j) = \overline{y}(-j)$. Тогда

$$R_{xy} = x * y_1. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 1 (о корреляции)**.** *Справедлива формула*

$$\mathcal{F}_N(R_{xy}) = X\overline{Y}, \tag{7}$$

где $X = \mathcal{F}_N(x)$, $Y = \mathcal{F}_N(y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (6) и (5) имеем $\mathcal{F}_N(R_{xy}) = XY_1$, где $Y_1 = \mathcal{F}_N(y_1)$. Остаётся проверить, что $Y_1 = \overline{Y}$. Согласно определению ДПФ

$$Y_1(k) = \sum_{j=0}^{N-1} y_1(j)\,\omega_N^{-kj} = y_1(0) + \sum_{j=1}^{N-1} \overline{y}(N-j)\,\omega_N^{k(N-j)} =$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} \overline{y}(j)\,\omega_N^{kj} = \overline{Y}(k).$$

Теорема доказана. □

Сигнал R_{xx} называется автокорреляционной функцией сигнала x. Согласно (7)

$$\mathcal{F}_N(R_{xx}) = X\overline{X} = \bigl|X\bigr|^2. \tag{8}$$

2.2. В п. 1.3 отмечалось, что сдвиги единичного импульса образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}_N$. Возникает вопрос: существуют ли ещё сигналы с таким же свойством сдвигов? На этот вопрос можно дать положительный ответ.

ЛЕММА. *Сдвиги* $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ *сигнала* x *образуют ортонормированный базис в пространстве* $\mathbb{C}_N$ *тогда и только тогда, когда* $R_{xx} = \delta_N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$R_{xx}(l) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{x}(j-l) = \langle x, x(\cdot - l)\rangle,$$

то условие $R_{xx} = \delta_N$ равносильно следующему

$$\langle x, x(\cdot - l)\rangle = \delta_N(l), \qquad l \in 0 : N-1. \tag{9}$$

Вместе с тем, согласно (3) при $k, k' \in 0 : N-1$

$$\langle x(\cdot - k), x(\cdot - k')\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j-k)\,\overline{x}\bigl((j-k) - (k'-k)\bigr) =$$
$$= \sum_{j'=0}^{N-1} x(j')\,\overline{x}\bigl(j' - (k'-k)\bigr) = \bigl\langle x, x\bigl(\,\cdot - (k'-k)\bigr)\bigr\rangle.$$

Условие ортонормированности принимает вид

$$\big\langle x, x\big(\,\cdot - (k' - k)\big)\big\rangle = \delta_N(k' - k), \qquad k, k' \in 0 : N - 1. \tag{10}$$

Отметим, что $k' - k = pN + l$, где $l \in 0 : N - 1$ и

$$p = \begin{cases} 0 & \text{при } k' - k \in 0 : N - 1, \\ -1 & \text{при } k' - k \in -N + 1 : -1. \end{cases}$$

На основании N-периодичности сигналов заключаем, что соотношения (9) и (10) эквивалентны. Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы сдвиги $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала x образовывали ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}_N$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\big|X(k)\big| = 1$ при всех $k \in 0 : N - 1$.*

Доказательство. Необходимость. Если $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ — ортонормированный базис, то по лемме $R_{xx} = \delta_N$. Отсюда следует, что $\mathcal{F}_N(R_{xx}) = \mathcal{F}_N(\delta_N)$. Согласно (8) и (1), $\big|X\big|^2 = \mathbb{1}$, что равносильно требуемому.

Достаточность. Поскольку $\big|X\big|^2 = \mathbb{1}$, то $\mathcal{F}_N(R_{xx}) = \mathcal{F}_N(\delta_N)$. По формуле обращения для ДПФ, $R_{xx} = \delta_N$. Остаётся сослаться на лемму. □

2.3. Возьмём N комплексных чисел $Y(k)$, $k \in 0 : N - 1$, по модулю равных единице, и с помощью обратного преобразования Фурье построим сигнал $y = \mathcal{F}_N^{-1}(Y)$. По теореме 2 его сдвиги $\{y(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}_N$. Разложим сигнал x по этому базису

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} c(k)\, y(\cdot - k) \tag{11}$$

и вычислим коэффициенты $c(k)$. Для этого умножим обе части (11) скалярно на $y(\cdot - l)$. Получим $\langle x, y(\cdot - l)\rangle = c(l)$ или

$$c(l) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \overline{y}(j - l) = R_{xy}(l).$$

Приходим к формуле

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} R_{xy}(k)\, y(\cdot - k). \tag{12}$$

3. Примеры

3.1. Пусть $N = 2^s$. Возьмём сигнал $Y \in \mathbb{C}_N$ так, чтобы выполнялись условия

1) $\bigl|Y(k)\bigr| = 1$ при $k \in 0 : N-1$,

2) сигнал Y — вещественный и чётный.

Тогда согласно предложениям 1 и 2 сигнал $y = \mathcal{F}_N^{-1}(Y)$ будет вещественным и чётным, а в силу теоремы 2 его сдвиги $\{y(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}_N$.

Рассмотрим сигнал $Y = \mathbb{1}$. Ясно, что он удовлетворяет условиям 1) и 2). Применив к Y формулу обращения для ДПФ, получим $y = \delta_N$. Теперь, начиная с индекса $N/2$, будем заменять в Y значения 1 на -1 так, чтобы чётность Y сохранялась. Условия 1) и 2) остаются верными. Следовательно, сигнал $y = \mathcal{F}_N^{-1}(Y)$ — вещественный и чётный и его сдвиги $\{y(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}_N$. Последний рассматриваемый спектр Y будет иметь вид $Y = -\mathbb{1}$, при этом $y = -\delta_N$.

Спектры Y и соответствующие сигналы $y = \mathcal{F}_N^{-1}(Y)$ при $N = 16$ приведены на рис. 1.1–1.9.

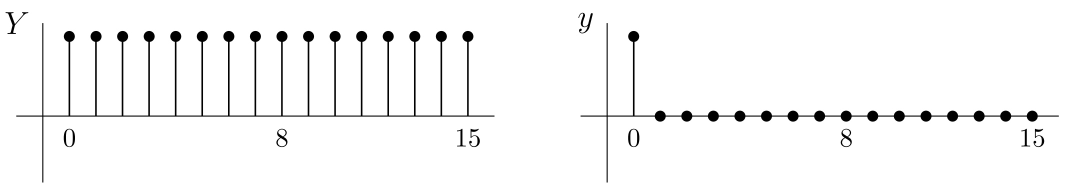

Рис. 1.1

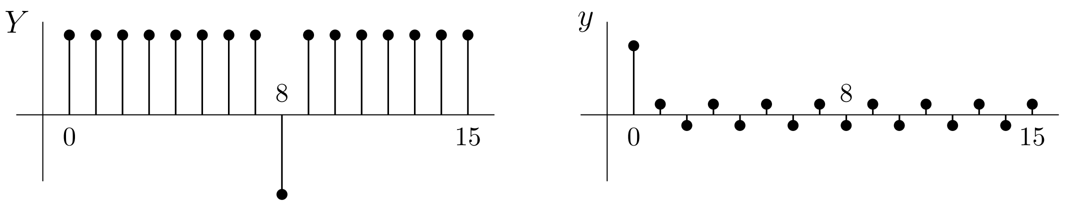

Рис. 1.2

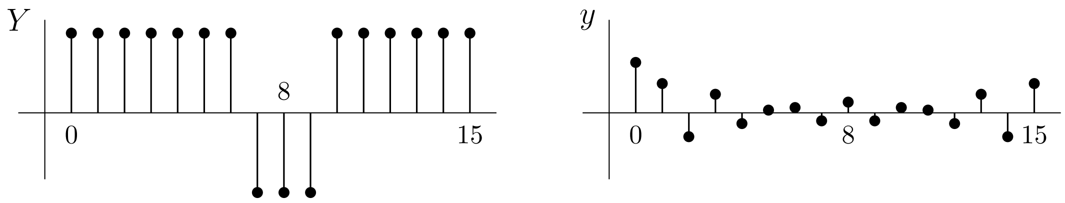

Рис. 1.3

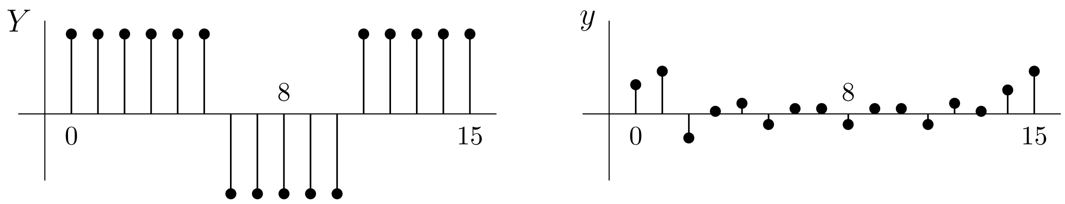

Рис. 1.4

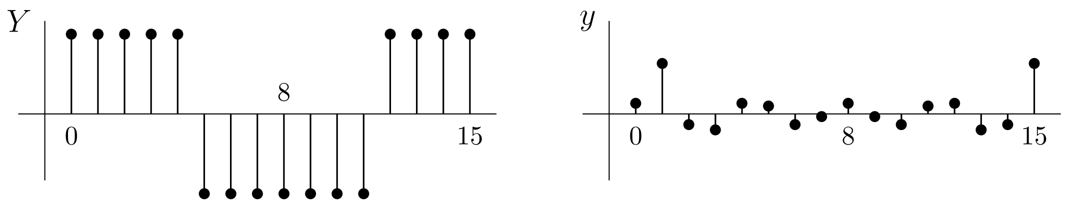

Рис. 1.5

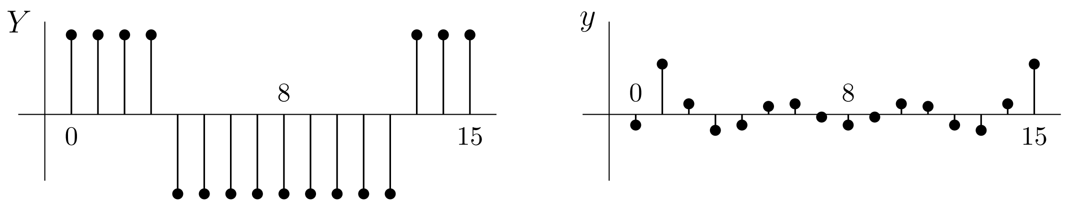

Рис. 1.6

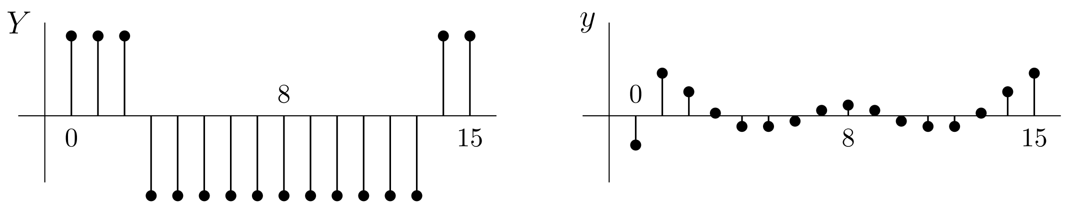

Рис. 1.7

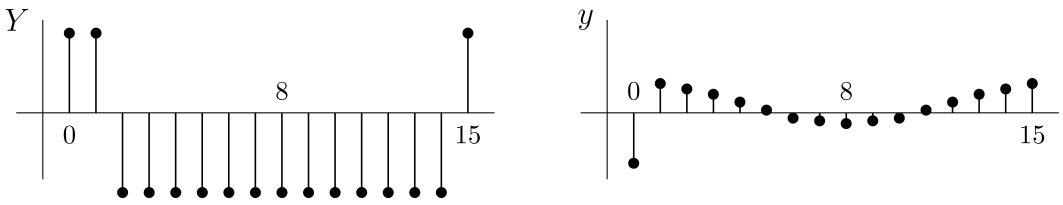

Рис. 1.8

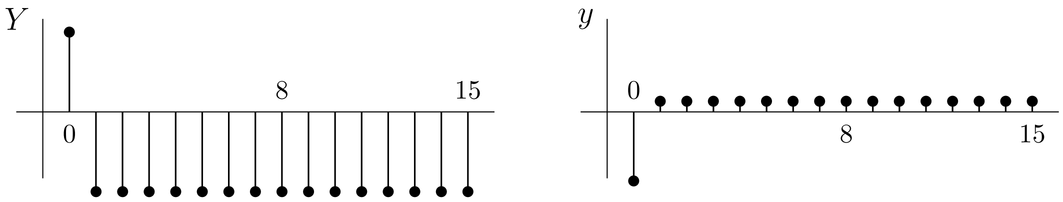

Рис. 1.9

3.2. Рассмотрим подробнее базис сдвигов $\{y_0(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала $y_0 = \mathcal{F}_N^{-1}(Y_0)$, где

$$Y_0(0) = 1, \qquad Y_0(k) = -1, \quad k \in 1 : N-1$$

(см. рис. 1.9). Вычислим сигнал y_0. По формуле обращения для ДПФ получим

$$y_0(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_0(k)\, \omega_N^{kj} = \frac{1}{N} \Big[1 - \sum_{k=1}^{N-1} \omega_N^{kj} \Big] =$$
$$= \frac{1}{N} \Big[2 - \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} \Big] = -\delta_N(j) + \frac{2}{N}\,.$$

Таким образом, сигнал y_0 имеет вид

$$y_0(j) = \begin{cases} -1 + \frac{2}{N} & \text{при } j = 0, \\ \frac{2}{N} & \text{при } j \in 1 : N-1. \end{cases}$$

Разложим произвольный сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ по базису сдвигов $\{y_0(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала y_0. В силу формулы (12) коэффициенты в этом разложении равны $R_{xy_0}(k)$, $k \in 0 : N-1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для циклической корреляции сигналов x и y_0 справедлива формула*

$$R_{xy_0}(k) = -x(k) + \tfrac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x(l), \qquad k \in 0 : N-1. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим значения сигнала y_0 в определение циклической корреляции. При $k \in 0 : N-1$ получим

$$R_{xy_0}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\,\overline{y}_0(l-k) = x(k)\bigl(-1 + \tfrac{2}{N}\bigr) + \tfrac{2}{N} \sum_{l \neq k} x(l) =$$

$$= -x(k) + \tfrac{2}{N}\, x(k) + \tfrac{2}{N} \sum_{l \neq k} x(l) = -x(k) + \tfrac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x(l).$$

Предложение доказано. □

3.3. Зададим сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ формулой

$$x(j) = \begin{cases} j & \text{при } j \in 0 : N/2 - 1, \\ N - j & \text{при } j \in N/2 : N-1. \end{cases} \tag{14}$$

Вычислим коэффициенты $R_{xy_0}(k)$ разложения сигнала x по базису сдвигов сигнала y_0. Согласно (13) при $k \in 0 : N-1$ имеем

$$R_{xy_0}(k) = -x(k) + \tfrac{2}{N}\Bigl[\sum_{l=0}^{N/2-1} l \;+ \sum_{l=N/2}^{N-1} (N-l)\Bigr] =$$

$$= -x(k) + \tfrac{2}{N}\Bigl[\tfrac{N/2-1}{2} \cdot \tfrac{N}{2} + \tfrac{1+N/2}{2} \cdot \tfrac{N}{2}\Bigr] = -x(k) + \tfrac{N}{2}\,.$$

График R_{xy_0} при $N = 16$ приведён на рис. 2.

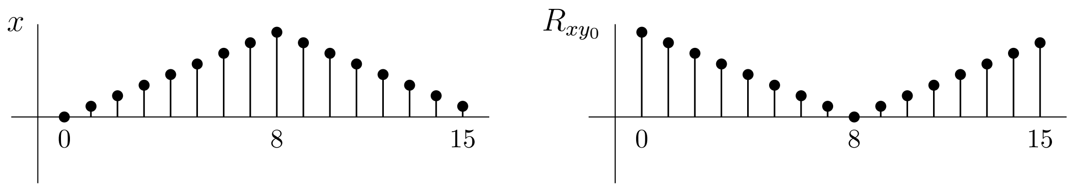

Рис. 2

3.4. Рассмотрим сигнал

$$x(j) = \begin{cases} (j - \frac{N}{4})^2 & \text{при } j \in 0 : N/2 - 1, \\ (j - \frac{3N}{4})^2 & \text{при } j \in N/2 : N-1. \end{cases} \tag{15}$$

Вычислим значение выражения $\sum\limits_{l=0}^{N-1} x(l)$. Будем использовать следующую формулу для суммы квадратов

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Запишем

$$\sum_{l=0}^{N-1} x(l) = \sum_{l=0}^{N/2-1} \left(l - \tfrac{N}{4}\right)^2 + \sum_{l=N/2}^{N-1} \left(l - \tfrac{3N}{4}\right)^2 =$$

$$= \sum_{l=0}^{N/2-1} \left(l^2 - \tfrac{N}{2}\,l + \tfrac{N^2}{16}\right) + \sum_{l=N/2}^{N-1} \left(l^2 - \tfrac{3N}{2}\,l + \tfrac{9N^2}{16}\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} l^2 - \tfrac{N}{2} \sum_{l=0}^{N/2-1} l - \tfrac{3N}{2} \sum_{l=N/2}^{N-1} l + \tfrac{N}{2} \cdot \tfrac{N^2}{16} + \tfrac{N}{2} \cdot \tfrac{9N^2}{16} =$$

$$= \tfrac{(N-1)N(2N-1)}{6} - \tfrac{N}{2}\left(\tfrac{N/2-1}{2} \cdot \tfrac{N}{2}\right) - \tfrac{3N}{2}\left(\tfrac{N/2+N-1}{2} \cdot \tfrac{N}{2}\right) + \tfrac{N}{2} \cdot \tfrac{5N^2}{8}.$$

Приведя подобные, получим

$$\sum_{l=0}^{N-1} x(l) = \tfrac{(N-1)N(2N-1)}{6} + \tfrac{N^2}{2} - \tfrac{5N^3}{16}.$$

Согласно (13)

$$R_{xy_0}(k) = -x(k) + \tfrac{2}{N}\left[\tfrac{(N-1)N(2N-1)}{6} + \tfrac{N^2}{2} - \tfrac{5N^3}{16}\right] =$$

$$= -x(k) + \tfrac{(N-1)(2N-1)}{3} + N - \tfrac{5N^2}{8}.$$

Окончательно,

$$R_{xy_0}(k) = -x(k) + \tfrac{N^2}{24} + \tfrac{1}{3}, \qquad k \in 0 : N-1.$$

При $N = 16$ $R_{xy_0}(k) = -x(k) + 11$, $k \in 0 : 15$ (см. рис. 3).

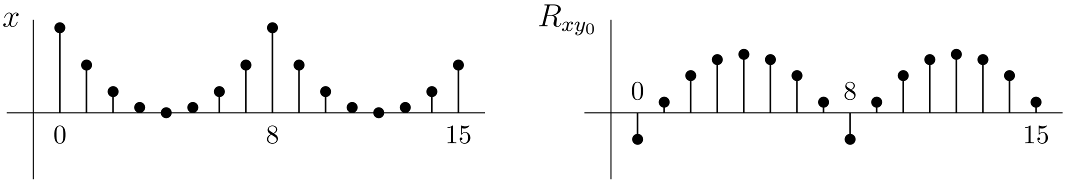

Рис. 3

3.5. Теперь разложим по базису сдвигов $\{y_0(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала y_0 сигнал

$$x(j) = \sin \tfrac{\pi j}{N}, \qquad j \in 0 : N-1. \tag{16}$$

В силу (13) коэффициенты разложения будут иметь вид

$$R_{xy_0}(k) = -x(k) + \tfrac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sin \tfrac{\pi l}{N}, \qquad k \in 0 : N-1.$$

Для вычисления $\sum\limits_{l=0}^{N-1} \sin \frac{\pi l}{N}$ воспользуемся формулой для суммы членов геометрической прогрессии. Запишем

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sin \tfrac{\pi l}{N} = \operatorname{Im}\Big[\sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{i\pi l}{N}}\Big] = \operatorname{Im}\Big[\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{N}\cdot N}}{1 - e^{\frac{i\pi}{N}}}\Big] = \operatorname{Im}\Big[\frac{1 - e^{i\pi}}{1 - e^{\frac{i\pi}{N}}}\Big] =$$

$$= \operatorname{Im}\Big[\frac{2}{1 - \cos\frac{\pi}{N} - i \sin\frac{\pi}{N}}\Big] = \operatorname{Im}\Big[\frac{2(1 - \cos\frac{\pi}{N} + i\sin\frac{\pi}{N})}{(1-\cos\frac{\pi}{N})^2 + \sin^2\frac{\pi}{N}}\Big] =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{N}}{2 - 2\cos\frac{\pi}{N}} = \frac{\sin\frac{\pi}{N}}{1-\cos\frac{\pi}{N}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{2N}\cos\frac{\pi}{2N}}{2\sin^2\frac{\pi}{2N}} = \operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{2N}\,.$$

Таким образом,

$$R_{xy_0}(k) = -x(k) + \tfrac{2}{N}\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{2N}, \qquad k \in 0 : N-1.$$

График R_{xy_0} при $N = 16$ изображён на рис. 4.

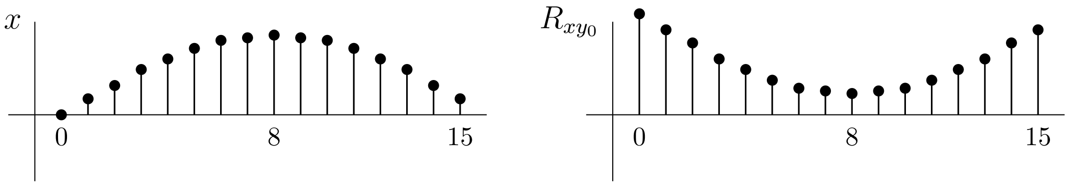

Рис. 4

3.6. Рассмотрим сигнал

$$x(j) = \omega_N^{j^2}, \qquad j \in 0 : N-1. \tag{17}$$

Опишем поведение модуля коэффициентов разложения сигнала x по базису сдвигов $\{y_0(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала y_0. Отметим, что для взаимной корреляции сигналов x и y_0 верно равенство

$$R_{xy_0}(-k) = R_{xy_0}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{18}$$

Это следует из предложения 3 с учётом того, что $x(k) = x(-k)$ при $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим случай $N = 16$. Значения R_{xy_0} получим приближённо (с пятью десятичными знаками). В силу (18) достаточно вычислить $R_{xy_0}(l)$ только при $l \in 0 : N/2 - 1$. Приведём окончательный результат:

$$
\begin{aligned}
|R_{xy_0}| = (&0.7071,\ 0.4398,\ 0.7071,\ 1.6753,\\
&0.7071,\ 1.6753,\ 0.7071,\ 0.4398,\\
&0.7071,\ 0.4398,\ 0.7071,\ 1.6753,\\
&0.7071,\ 1.6753,\ 0.7071,\ 0.4398).
\end{aligned}
$$

График $\left|R_{xy_0}\right|$ приведён на рис. 5.

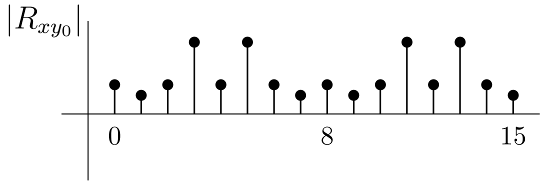

Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 1. СПб.: НИИММ, 2003.