# ФРЕЙМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА*

Н. А. Соловьёва

vinyo@mail.ru

11 апреля 2009 г.

**1°**. Представляется естественным начинать изложение теории фреймов в $\mathbb{C}^n$ со следующего определения:

*Векторы* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ *из* $\mathbb{C}^n$ *при* $m \geqslant n$ *образуют фрейм, если их линейная оболочка совпадает с* $\mathbb{C}^n$,

$$\mathcal{L}\bigl(\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}\bigr) = \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Обозначим через $\varPhi$ матрицу со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Система* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ *является фреймом в* $\mathbb{C}^n$ *тогда и только тогда, когда эрмитова матрица* $S = \varPhi\varPhi^*$ *положительно определена.*

Доказательство. При всех $x \in \mathbb{C}^n$ выполняется равенство

$$\langle \varPhi\varPhi^* x, x\rangle = \bigl\|\varPhi^* x\bigr\|^2. \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует, что матрица $S$ неотрицательно определена. Проверим, что при выполнении условия (1) она положительно определена.

Пусть $\langle Sx_0, x_0\rangle = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Согласно (2), $\varPhi^* x_0 = 0$, то есть $\langle x_0, \varphi_k\rangle = 0$ при всех $k \in 0 : m-1$. В силу (1) существует разложение

$$x_0 = \sum_{k=0}^{m-1} c_k\, \varphi_k\,.$$

Умножим его скалярно на $x_0$. Получим

$$\bigl\|x_0\bigr\|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{c}_k \langle x_0, \varphi_k\rangle = 0\,.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Значит, $x_0 = 0$. Положительная определённость матрицы $S$ установлена.

Наоборот, предположим, что матрица $S$ положительно определена, и покажем, что выполняется соотношение (1).

Известно, что у эрмитовой положительно определённой матрицы существует обратная матрица, которая также является эрмитовой и положительно определённой. Введём векторы

$$\psi_k = S^{-1}\,\varphi_k\,, \qquad k \in 0:m-1\,,$$

и обозначим через $\varPsi$ матрицу со столбцами $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$. Имеем $\varPsi = S^{-1}\,\varPhi$. Как следствие, $\varPsi\,\varPhi^* = I_n$. Переходя к сопряжённым матрицам, получаем

$$\varPhi\,\varPsi^* = I_n\,.$$

Умножим обе части последнего равенства на произвольный вектор $x \in \mathbb{C}^n$. Придём к разложению

$$x = \sum_{k=0}^{m-1} \langle x, \psi_k\rangle\,\varphi_k\,,$$

которое гарантирует выполнение условия (1). $\square$

Предложение 1 можно переформулировать в эквивалентном виде.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** *Система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является фреймом в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда система линейных однородных уравнений*

$$\langle x, \varphi_k\rangle = 0\,, \qquad k \in 0:m-1\,,$$

*имеет только нулевое решение.*

Доказательство очевидным образом следует из предложения 1 и формулы (2).

**2°**. Пусть $U$ — унитарная матрица порядка $n$ с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и соответствующими ортонормированными собственными векторами $p_1, \ldots, p_n$. Возьмём единичный вектор $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ и построим при $m \geqslant n$ систему векторов

$$\bigl\{\varphi_0, U\varphi_0, U^2\varphi_0, \ldots, U^{m-1}\varphi_0\bigr\}\,. \tag{3}$$

Нас интересует вопрос, когда эта система будет фреймом.

**ТЕОРЕМА.** *Для того чтобы система* (3) *была фреймом в $\mathbb{C}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

($\alpha$) *собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $U$ попарно различны;*

($\beta$) $\bigl|\langle\varphi_0, p_j\rangle\bigr| \neq 0$ *при всех $j \in 1:n$.*

Доказательство. Наряду с векторами $\varphi_k = U^k\varphi_0$ рассмотрим векторы $g_k = P^*\varphi_k$, где $P^*$ — сопряжённая матрица к унитарной матрице $P$, составленной из столбцов $p_1, \dots, p_n$. Обозначим через $\Phi$ и $G$ матрицы со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ и $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$ соответственно. Имеем $G = P^*\Phi$ и

$$\langle GG^*x, x\rangle = \langle P^*\Phi\Phi^*Px, x\rangle = \langle \Phi\Phi^*y, y\rangle\,,$$

где $y = Px$. Отсюда и из предложения 1 следует, что система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ будет фреймом тогда и только тогда, когда фрейм образуют векторы $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$.

Воспользуемся спектральным разложением матрицы $U$:

$$U = P\,\Lambda\,P^*,$$

где $\Lambda$ — диагональная матрица, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Получим

$$g_k = P^*U^k\varphi_0 = P^*P\,\Lambda^k P^*\varphi_0 = \Lambda^k\big(P^*\varphi_0\big)\,. \tag{4}$$

Обозначим $b = P^*\varphi_0$. Это вектор с координатами $b(j) = \langle\varphi_0, p_j\rangle$, $j \in 1:n$. Координаты вектора $g_k$ имеют вид

$$g_k(j) = \lambda_j^k\, b(j)\,, \qquad j \in 1:n\,, \quad k \in 0:m-1\,. \tag{5}$$

Нужно доказать, что векторы (5) образуют фрейм в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда выполняются условия ($\alpha$) и ($\beta$).

Будем опираться на предложение 2. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений $\langle x, g_k\rangle = 0$, $k \in 0:m-1$, которую в силу (5) можно переписать в эквивалентном виде

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k\, b(j)\,\bar{x}(j) = 0\,, \qquad k \in 0:m-1\,. \tag{6}$$

Если система (6) имеет только нулевое решение, то условия ($\alpha$) и ($\beta$) выполняются. Действительно, пусть $b(j_0) = 0$ при некотором $j_0 \in 1:n$. Тогда у (6) появляется ненулевое решение — единичный орт $x = e_{j_0}$. Значит, $b(j) \neq 0$ при всех $j \in 1:n$, что равносильно условию ($\beta$). В случае $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2}$ при $j_1 \neq j_2$ у (6) также появляется ненулевое решение

$$\bar{x}(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = j_1\,; \\ -b(j_1)/b(j_2) & \text{при } j = j_2\,; \\ 0 & \text{при остальных } j \in 1:n\,. \end{cases}$$

Значит, собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы $U$ попарно различны. Это составляет содержание условия ($\alpha$).

Наоборот, пусть выполнены условия $(\alpha)$ и $(\beta)$. Возьмём решение $x_0$ системы (6) и покажем, что $x_0 = \mathbb{O}$. Этим будет завершено доказательство теоремы.

Вектор $x_0$ удовлетворяет укороченной системе уравнений с квадратной матрицей:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \, b(j) \, \bar{x}_0(j) = 0 \,, \qquad k \in 0 : n-1 \,. \tag{7}$$

Матрица $D$ системы (7) допускает разложение

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 \, b(1) & \dots & \lambda_n^0 \, b(n) \\ \lambda_1^1 \, b(1) & \dots & \lambda_n^1 \, b(n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} \, b(1) & \dots & \lambda_n^{n-1} \, b(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \lambda_1^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b(2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b(n) \end{bmatrix} .$$

Первый сомножитель в правой части этого разложения есть матрица Вандермонда. Она невырождена в силу условия $(\alpha)$. Второй сомножитель невырожден в силу условия $(\beta)$. Значит, матрица $D$ невырождена, поэтому сама система (7) имеет только нулевое решение.

Теорема доказана. $\square$

Отметим, что условия $(\alpha)$ и $(\beta)$ не зависят от $m$.