О ЖЁСТКИХ ФРЕЙМАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА*

Н. А. Соловьёва

vinyo@mail.ru

12 марта 2008 г.

В докладе приводится короткое доказательство одного эффектного результата из [1].

Пусть $m > n > 1$. Возьмём унитарную матрицу U порядка n, единичный вектор $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ и построим последовательность единичных векторов

$$\varphi_k = U\varphi_{k-1}, \qquad k = 1, \ldots, m-1. \tag{1}$$

Обозначим $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если система Φ образует жёсткий фрейм, то найдётся число $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, такое, что*

$$U^m = c\, I_n\,.$$

Доказательство. Разложим векторы φ_{m-1} и $U\varphi_{m-1}$ по фрейму Φ. По определению жёсткого фрейма [2]

$$\varphi_{m-1} = \frac{n}{m}\left(\sum_{k=0}^{m-2} \langle \varphi_{m-1}, \varphi_k\rangle \varphi_k + \varphi_{m-1}\right), \tag{2}$$

$$U\varphi_{m-1} = \frac{n}{m}\left(\langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0\rangle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \langle \varphi_{m-1}, U^*\varphi_k\rangle \varphi_k\right).$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Приняв во внимание, что $U^*\varphi_k = U^*U\varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}$ при $k \in 1 : m-1$, перепишем последнее равенство в виде

$$U\varphi_{m-1} = \frac{n}{m}\Big(\langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0\rangle\, UU^*\varphi_0 + \sum_{k=1}^{m-1}\langle\varphi_{m-1}, \varphi_{k-1}\rangle\, U\varphi_{k-1}\Big) =$$
$$= \frac{n}{m}\, U\Big(\langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0\rangle\, U^*\varphi_0 + \sum_{k=1}^{m-1}\langle\varphi_{m-1}, \varphi_{k-1}\rangle\varphi_{k-1}\Big).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_{m-1} = \frac{n}{m}\Big(\langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0\rangle\, U^*\varphi_0 + \sum_{k=1}^{m-1}\langle\varphi_{m-1}, \varphi_{k-1}\rangle\varphi_{k-1}\Big). \tag{3}$$

Вычтем (3) из (2). После сокращения на общий множитель получим

$$\varphi_{m-1} = \langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0\rangle\, U^*\varphi_0$$

и

$$U^m\varphi_0 = \langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0\rangle\varphi_0\,. \tag{4}$$

Обозначим $c = \langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0\rangle = \langle U^m\varphi_0, \varphi_0\rangle$. Тогда формула (4) примет вид

$$U^m\varphi_0 = c\,\varphi_0\,. \tag{5}$$

Равенство норм $\|c\,\varphi_0\| = \|U^m\varphi_0\| = \|\varphi_0\|$ гарантирует, что $|c| = 1$.

Далее, согласно (1) и (5)

$$U^m\varphi_k = U^m\big(U^k\varphi_0\big) = U^k\big(U^m\varphi_0\big) = c\,\varphi_k\,.$$

Значит,

$$\big(U^m - c\,I_n\big)\varphi_k = \mathbb{O} \quad \text{при} \;\; k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Напомним, что линейная оболочка элементов жёсткого фрейма совпадает с $\mathbb{C}^n$, поэтому равенство $(U^m - c\,I_n)\,x = \mathbb{O}$ выполняется для всех $x \in \mathbb{C}^n$. Взяв в качестве x последовательно все единичные орты, придём к требуемой формуле $U^m = c\,I_n$. Предложение доказано. $\square$

З а м е ч а н и е. Гармонические фреймы можно представить в виде (1). Для этого достаточно положить $\varphi_0(j) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ при всех $j \in 1 : n$ и

$$U = \operatorname{diag}(w_1, \ldots, w_n),$$

где w_j — попарно различные корни степени m из единицы. Для гармонических фреймов предложение тривиально, причём $c = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Casazza P. G., Kovačevič J. *Uniform Tight Frames with Erasures* // Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. No. 2–4. P. 387–430.

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Системы Мерседес-Бенц и жёсткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 февраля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0228`).