Неравенства для точек на единичной сфере в n-мерном пространстве*

Н. О. Котелина — nkotelina@gmail.com

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

8 сентября 2012 г.

В докладе обобщается неравенство Б. Б. Венкова на случай произвольных весов. Устанавливаются условия достижения равенства в обобщённом неравенстве Б. Б. Венкова. Даётся определение и приводится пример взвешенного сферического полудизайна.

1°. Введение. Б. Б. Венков на своих лекциях [1] в университете Бордо в 1996 году рассматривал системы из m векторов $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ на единичной сфере S^{n-1} в пространстве $\mathbb{R}^n$. Он ввёл понятие t-потенциала

$$P_t(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t,$$

где t — чётное натуральное число, $\langle x_i, x_j\rangle$ — скалярное произведение векторов x_i, x_j, и доказал неравенство

$$P_t(X) \geqslant c_t\, m^2,$$

в котором константа c_t имеет вид

$$c_t = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}. \tag{1}$$

Здесь мы обобщим неравенство Б. Б. Венкова. При $t = 2$ потенциал $P_2(X)$ был рассмотрен в статье [2] и назван *фреймовым потенциалом.* Неравенства для фреймового потенциала $P_2(X)$ были установлены в [3] и [6].

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Основные сведения и результаты. Зафиксируем натуральные числа $n \geqslant 2$, m и чётное t. Для системы векторов $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ рассмотрим квадратную матрицу A порядка m с элементами $a_{ij} = \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t$, $i,\ j \in 1:m$. Эта матрица была введена Б. Б. Венковым в работе [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Матрица A неотрицательно определена:*

$$\langle AW, W\rangle \geqslant 0, \qquad W \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$. По полиномиальной формуле имеем

$$\big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t = \sum_{|k|=t} c(k)\, x_i^k\, x_j^k, \tag{3}$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами (мультииндекс), $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $x_i^k = x_{i1}^{k_1} x_{i2}^{k_2} \cdots x_{in}^{k_n}$, $c(k) = t!/(k_1! k_2! \cdots k_n!)$. На основании (3) для всех векторов $W = (W_1, \dots, W_m) \in \mathbb{R}^m$ получим

$$\begin{aligned}\langle AW, W\rangle &= \sum_{i,j=1}^m \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t W_i\, W_j = \sum_{|k|=t} c(k) \sum_{i,j=1}^m W_i\, x_i^k\, W_j\, x_j^k = \\ &= \sum_{|k|=t} c(k) \Big[\sum_{i=1}^m W_i\, x_i^k\Big]^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Предложение доказано. □

Возникает вопрос, когда неравенство (2) является строгим. Рассмотрим вектор $W^0 = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^m$. Венков [1] доказал неравенство

$$\langle AW^0, W^0\rangle \geqslant c_t,$$

где константа c_t определена с помощью формулы (1).

Возьмём произвольный вектор $W = (W_1, \dots, W_m) \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$. Не требуем, чтобы веса W_i были неотрицательными.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо следующее неравенство*

$$\langle AW, W\rangle \geqslant c_t. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в п. 5°.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для всех $W \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство*

$$\langle AW, W\rangle \geqslant c_t (W_1 + W_2 + \dots + W_m)^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любых точек $x_1, \dots, x_m \in S^{n-1}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^2 \geqslant \frac{m^2}{n}. \tag{5}$$

Для доказательства следствия 2 нужно в (4) положить $t = 2$, $W_i = \frac{1}{m}$, $i \in 1 : m$, и учесть, что $c_2 = \frac{1}{n}$. Доказательство неравенства (5) приводится также в докладе [6].

Покажем теперь, что константа c_t в (4) точная, и установим условия, при которых в неравенстве (4) будет равенство.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы выполнялось равенство $\langle AW, W\rangle = c_t$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{m} W_i \big[\langle x_i, x\rangle\big]^t = c_t \|x\|^t, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $\{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$. Соотношение* (5) *превращается в равенство тогда и только тогда, когда система $\{x_1, \dots, x_m\}$ является жёстким фреймом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в теореме 2 будет $t = 2$, $W = W^0 = \big(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\big)$. Тогда равенство $\langle AW^0, W^0\rangle = c_2 = \frac{1}{n}$ равносильно тождеству

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle x_i, x\rangle\big]^2 = \frac{m}{n} \|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

которое характеризует систему $\{x_1, \dots, x_m\}$ как жёсткий фрейм. $\square$

Следствие 3 доказывалось также в докладе [6]. Доказательство теоремы 2 приведено в п. 6°.

Далее мы будем называть тождество (6) тождеством Варинга. Е. Варинг (1734–1798) занимался представлением формы $\|x\|^t = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{t/2}$ в виде суммы степеней порядка t линейных форм (см. [4]).

3°. Взвешенные сферические полудизайны. Пусть t — натуральное чётное число. Теорема 2 делает естественным следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Система точек $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ называется взвешенным сферическим полудизайном порядка t с вектором весов $W = (W_1, \dots, W_m) \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, если выполнено тождество* (6).

Соотношения между сферическими дизайнами и полудизайнами обсуждаются в статье [5].

Теорема 2 может быть переформулирована следующим образом: *неравенство* (4) *обращается в равенство на взвешенных сферических полудизайнах порядка* t *и только на них.*

Дадим пример взвешенного сферического полудизайна.

ПРИМЕР. В [4, с. 103] приводится тождество Лукаса (1877) для произвольного вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$8\sum_{i=1}^{3} x_i^4 + \sum (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4 = 12\|x\|^4. \tag{7}$$

Вторая сумма содержит 4 возможных комбинации знаков $+$ и $-$. Из тождества (7) получим тождество Варинга при $t = 4$. Для $n = 3$ константа c_4 равна $\frac{1}{5}$. Перепишем (7) следующим образом

$$\frac{2}{15}\sum_{i=1}^{3}\bigl[\langle e_i, x\rangle\bigr]^4 + \frac{3}{20}\sum_{i=1}^{4}\bigl[\langle \varphi_i, x\rangle\bigr]^4 = \frac{1}{5}\|x\|^4, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

где $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, а векторы $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ имеют вид $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, \pm 1, \pm 1)$. Таким образом, система $X = \{e_1, e_2, e_3, \varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$ является взвешенным сферическим полудизайном порядка 4 с вектором весов $W = \bigl(\frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\bigr)$.

4°. **Предварительные сведения для доказательства теорем.** Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}_{n,t}$ однородных полиномов степени t от n переменных. Каждый такой полином может быть записан в виде:

$$f(x) = \sum_{|k|=t} a(k) x^k,$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$, $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, $a(k)$ — произвольные вещественные коэффициенты. Для произвольных полиномов $f(x)$, $g(x) = \sum_{|k|=t} b(k) x^k$ определим скалярное произведение формулой

$$[f, g] = \sum_{|k|=t} \frac{a(k) b(k)}{c(k)},$$

где $c(k) = t!/(k_1! \cdots k_n!)$. Для любого $y \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим полином

$$\rho_y(x) = \bigl[\langle y, x\rangle\bigr]^t = [y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n]^t.$$

По полиномиальной формуле

$$\rho_y(x) = \sum_{|k|=t} c(k)\, y^k\, x^k.$$

Отсюда для любого $f \in \mathcal{P}_{n,t}$ получаем

$$[\rho_y, f] = \sum_{|k|=t} \frac{c(k)\, y^k a(k)}{c(k)} = f(y). \tag{8}$$

Пусть t — натуральное чётное число. Обозначим

$$\omega_t(x) = \|x\|^t = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{t/2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо равенство* $[\omega_t, \omega_t] = 1/c_t$, *где константа* c_t *определена формулой* (1).

Доказательство можно найти в [4, с. 107].

5°. Доказательство теоремы 1. Используя скалярное произведение $[f, g]$, запишем очевидное неравенство

$$Q := \Big[\sum_{i=1}^m W_i\, \rho_{x_i} - c_t\, \omega_t, \sum_{j=1}^m W_j\, \rho_{x_j} - c_t\, \omega_t\Big] \geqslant 0. \tag{9}$$

Имеем

$$Q = \sum_{i,j=1}^m W_i\, W_j \big[\rho_{x_i}, \rho_{x_j}\big] - 2c_t \Big[\sum_{i=1}^m W_i\, \rho_{x_i}, \omega_t\Big] + c_t^2 [\omega_t, \omega_t].$$

В силу (8), $\big[\rho_{x_i}, \rho_{x_j}\big] = \rho_{x_j}(x_i) = \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t$. Далее, учитывая условия $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, $x_i \in S^{n-1}$, получаем

$$\Big[\sum_{i=1}^m W_i\, \rho_{x_i}, \omega_t\Big] = \sum_{i=1}^m W_i\, \omega_t(x_i) = \sum_{i=1}^m W_i\, \|x_i\|^t = 1.$$

С учётом предложения 2 справедливо неравенство

$$Q = \sum_{i,j=1}^m W_i\, W_j \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t - 2c_t + c_t^2 \cdot \frac{1}{c_t} \geqslant 0. \tag{10}$$

Отсюда следует $\langle AW, W\rangle \geqslant c_t$, что и требовалось доказать. □

6°. Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть система точек $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ лежит на сфере S^{n-1} и на некотором векторе весов $W = (W_1, \ldots, W_m)$, таком, что $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, выполняется равенство

$$\langle AW, W\rangle := \sum_{i,j=1}^m \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t W_i\, W_j = c_t.$$

Тогда неравенства (9) и (10) также будут выполняться как равенства. Как следствие,

$$\sum_{i=1}^m W_i\, \rho_{x_i} - c_t\, \omega_t = 0,$$

что эквивалентно тождеству (6).
Достаточность. Пусть выполняется тождество (6). Подставим $x = x_j$ в (6). Так как $\|x_j\| = 1$, то

$$\sum_{i=1}^m W_i \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t = c_t, \qquad j \in 1:m. \tag{11}$$

Умножим обе части (11) на W_j, $\sum_{j=1}^m W_j = 1$, и просуммируем по $j \in 1:m$. Получим равенство $\langle AW, W\rangle = c_t$. $\square$

7°. Ещё одно неравенство. Для натурального чётного t справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t \geqslant c_t \Big[\sum_{i=1}^m \|x_i\|^t\Big]^2 \tag{12}$$

для всех $x_i \in \mathbb{R}^n$. Здесь константа c_t определена с помощью (1).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Неравенство (12) было установлено в [5], для $t = 2$ — в [3] и [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Venkov B. *Réseaux et designs sphériques* // Réseaux Euclidiens, Designs sphériques et Formes Modulaires, L'Enseignement mathématique Monograph, Géneve. 2001. No. 37. P. 10–86.

2. Benedetto J. J., Fickus M. *Finite normalized tight frames* // Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. P. 357–385.

3. Casazza P. G. *Custom building finite frames* // Contemporary Math. 2004. V. 345. P. 68–86.

4. Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. No. 463. P. 1–155.

5. Котелина Н. О., Певный А. Б. *Экстремальные свойства сферических полудизайнов* // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 5. С. 162–170.

6. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Четвёртое определение жёсткого фрейма* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 мая 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0530`).