ПОСТРОЕНИЕ СФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКТИВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ БЕЗЬЕ*

М. И. Григорьев

m_grigoriev@list.ru

24 февраля 2007 г.

1°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана матрица полюсов

$$\begin{array}{ccc} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{array}$$

По строкам этой матрицы построим три кривые Безье второго порядка [1]

$$B_i(v) = \sum_{j=0}^{2} P_{ij}\, b_j^2(v), \qquad v \in [0,1], \quad i \in 0:2,$$

где $b_j^2(v) = C_2^j\, v^j (1-v)^{2-j}$. Кривые $B_i(v)$ будем называть *образующими*. Зафиксируем $v \in [0,1]$. По точкам $B_0(v)$, $B_1(v)$, $B_2(v)$ можно в свою очередь построить кривую Безье $B(u,v)$, $u \in [0,1]$. Когда параметр v пробегает весь отрезок $[0,1]$, кривая $B(u,v)$ описывает поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, которая называется *поверхностью Безье второго порядка, заданной на четырёхугольнике* (рис. 1). Её аналитическое представление имеет вид

$$B(u,v) = \sum_{i=0}^{2} B_i(v)\, b_i^2(u) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} P_{ij}\, b_i^2(u)\, b_j^2(v). \tag{1}$$

Из (1) следует, что

$$B(0,v) = B_0(v), \quad B(1,v) = B_2(v), \quad v \in [0,1].$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

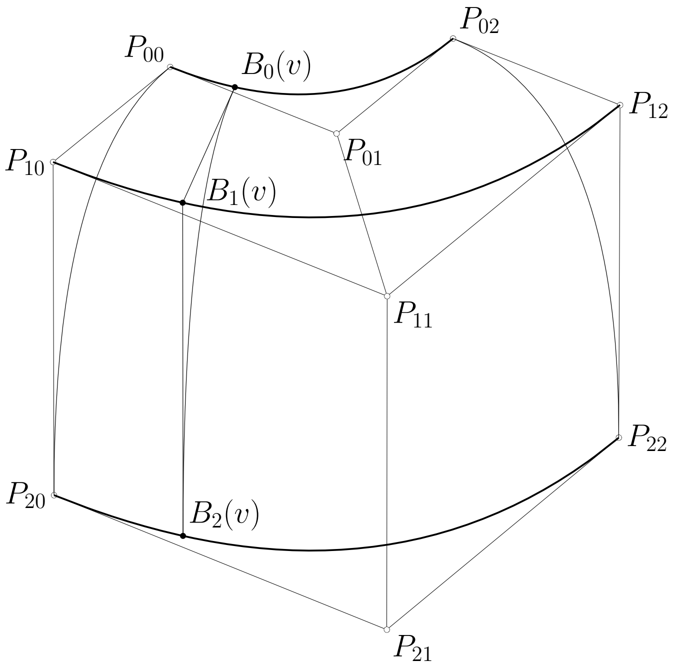

Рис. 1

2°. Припишем каждому полюсу P_{ij} четвёртую координату $t = 1$ и рассмотрим полюсы $P'_{ij} = (P_{ij}, 1)$ в четырёхмерном пространстве $\mathbb{R}^4$. Зафиксируем девять положительных чисел $w_{ij},\ i, j \in 0:2$, которые будем называть *весами*, и введём полюсы $\widehat{P}_{ij} = w_{ij}\, P'_{ij} = (w_{ij}\, P_{ij}, w_{ij})$. По ним может быть построена поверхность Безье в $\mathbb{R}^4$:

$$\widehat{B}(u, v) = \Big(\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} w_{ij}\, P_{ij}\, b_i^2(u)\, b_j^2(v),\ \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} w_{ij}\, b_i^2(u)\, b_j^2(v)\Big).$$

Спроецируем эту поверхность на гиперплоскость $t = 1$, используя центральную проекцию с центром в начале координат, то есть поделим все координаты точек $\widehat{B}(u, v)$ на четвёртую, которую затем отбросим. Получим

$$R(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} w_{ij}\, P_{ij}\, b_i^2(u)\, b_j^2(v)}{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} w_{ij}\, b_i^2(u)\, b_j^2(v)}, \qquad u, v \in [0, 1]. \tag{2}$$

Формула (2) определяет поверхность в $\mathbb{R}^3$, которая называется *проективной поверхностью Безье второго порядка, заданной на четырёхугольнике*. Её формой при неизменном положении полюсов P_{ij} можно управлять, варьируя веса w_{ij}.

Более подробные сведения о поверхностях вида (2) имеются в [2].

3°. Пусть на плоскости зафиксированы три полюса P_0, P_1, P_2. По ним можно построить проективную кривую Безье второго порядка [2]

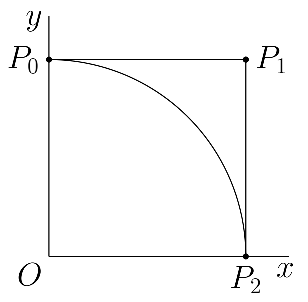

Рис. 2

$$R(u) = \frac{\sum_{i=0}^{2} \omega_i\, P_i\, b_i^2(u)}{\sum_{i=0}^{2} \omega_i\, b_i^2(u)}, \qquad u \in [0,1], \tag{3}$$

где $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ — некоторые положительные числа. Известно [3], что если полюсы P_0, P_1, P_2 расположены в вершинах единичного квадрата так, как показано на рис. 2, и выполнено условие $2\omega_1^2 = \omega_0\,\omega_2$, то кривая (3) является четвертью единичной окружности.

4°. Вернёмся к формуле (2) и перепишем её в виде

$$R(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{2} \omega_i(v)\, R_i(v)\, b_i^2(u)}{\sum_{i=0}^{2} \omega_i(v)\, b_i^2(u)}, \tag{4}$$

где

$$\omega_i(v) = \sum_{j=0}^{2} w_{ij}\, b_j^2(v), \qquad R_i(v) = \Big(\sum_{j=0}^{2} w_{ij}\, P_{ij}\, b_j^2(v)\Big)\Big/\omega_i(v). \tag{5}$$

Отметим, что кривая на поверхности (2), соответствующая некоторому фиксированному значению параметра v из отрезка $[0,1]$, является проективной кривой Безье второго порядка, построенной по полюсам $R_0(v), R_1(v), R_2(v)$ с весами $\omega_0(v), \omega_1(v), \omega_2(v)$ соответственно. В свою очередь указанные полюсы лежат на трёх проективных кривых Безье, определяемых формулой (5).

5°. Рассмотрим случай, когда полюсы P_{ij}, $i, j \in 0:2$ распределены по вершинам единичного куба так, как показано на рис 3:

$$\begin{gathered} P_{00} = P_{01} = P_{02} = (0,0,1), \\ P_{10} = (1,0,1),\ P_{11} = (1,1,1),\ P_{12} = (0,1,1), \\ P_{20} = (1,0,0),\ P_{21} = (1,1,0),\ P_{22} = (0,1,0). \end{gathered}$$

Очевидно, что в этом случае кривая $R_0(v)$ вырождается в точку $(0,0,1)$.

Подберём веса w_{ij} так, чтобы соответствующая проективная поверхность Безье совпала с одной восьмой частью сферы единичного радиуса с центром в точке O. Для этого кривые $R(u,0)$, $R(u,1)$ и $R(1,v)$, расположенные соответственно в плоскостях $Y=0$, $X=0$ и $Z=0$, должны быть четвертями окружно-

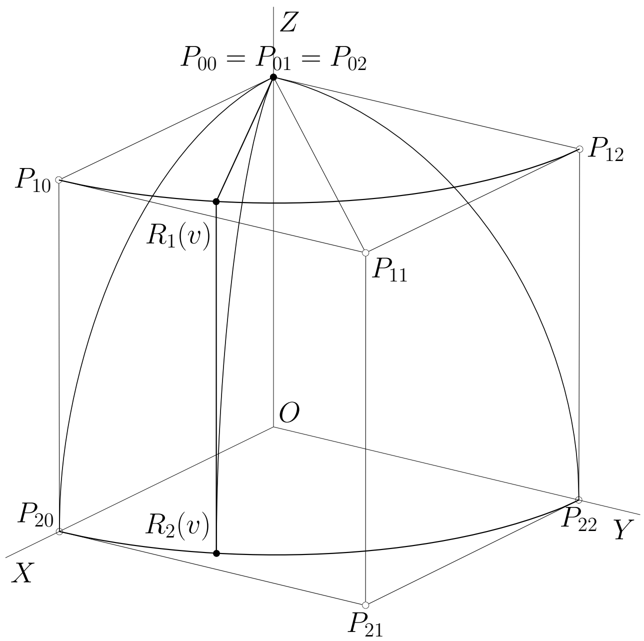

Рис. 3

стей единичного радиуса (см. рис. 3). Согласно (2) и (5)

$$R(u,0) = \frac{\sum_{i=0}^{2} w_{i0}\, P_{i0}\, b_i^2(u)}{\sum_{i=0}^{2} w_{i0}\, b_i^2(u)}, \qquad R(u,1) = \frac{\sum_{i=0}^{2} w_{i2}\, P_{i2}\, b_i^2(u)}{\sum_{i=0}^{2} w_{i2}\, b_i^2(u)},$$

$$R(1,v) = R_2(v) = \frac{\sum_{j=0}^{2} w_{2j}\, P_{2j}\, b_j^2(v)}{\sum_{j=0}^{2} w_{2j}\, b_j^2(v)}.$$

Нетрудно понять, что мы находимся в условиях п. 3°. Кривые $R(u,0)$, $R(u,1)$ и $R(1,v)$ будут четвертями единичных окружностей, если

$$2w_{10}^2 = w_{00}\, w_{20}, \quad 2w_{12}^2 = w_{02}\, w_{22}, \quad 2w_{21}^2 = w_{20}\, w_{22}. \tag{6}$$

Потребуем, чтобы кривая $R_1(v)$, расположенная в плоскости $Z = 1$, также была четвертью единичной окружности. Поскольку и в этом случае мы находимся в условиях п. 3°, то необходимо, чтобы

$$2w_{11}^2 = w_{10}\, w_{12}. \tag{7}$$

Условиям (6) и (7) удовлетворяют веса

$$w_{00} = w_{20} = 1,\ w_{10} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \qquad w_{02} = w_{22} = 1,\ w_{12} = \tfrac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_{21} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \qquad w_{11} = \tfrac{1}{2}\,.$$

При этом

$$\begin{gathered} \omega_2(v) = b_0^2(v) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, b_1^2(v) + b_2^2(v), \\ \omega_1(v) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, \omega_2(v), \\ \omega_0(v) = b_0^2(v) + w_{01}\, b_1^2(v) + b_2^2(v). \end{gathered} \tag{8}$$

Остаётся определить единственный вес w_{01}.

При фиксированном $v \in (0,1)$ полюсы $R_0(v)$, $R_1(v)$, $R_2(v)$ лежат в вертикальной плоскости и их положение такое же, как положение точек P_0, P_1, P_2 в п. 3°. Мы хотим, чтобы проективная кривая (4), построенная по этим полюсам, была четвертью окружности. Как отмечалось, для этого необходимо выполение условия

$$2\omega_1^2(v) = \omega_0(v)\, \omega_2(v).$$

На основании (8) получаем $\omega_2(v) = \omega_0(v)$ при всех $v \in (0,1)$, откуда следует, что $w_{01} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Подведём итог. Проективная поверхность Безье (2) при выбранных в начале пункта полюсах и весах

$$\begin{aligned} &w_{00} = 1, && w_{01} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, && w_{02} = 1, \\ &w_{10} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, && w_{11} = \tfrac{1}{2}, && w_{12} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ &w_{20} = 1, && w_{21} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, && w_{22} = 1 \end{aligned}$$

является одной восьмой частью единичной сферы.

С помощью всевозможных отражений этой поверхности относительно плоскостей OXY, OYZ и OXZ можно построить полную сферу.

6°. На рис. 4 изображены восьмая часть сферы и полная сфера, построенные описанным выше методом.

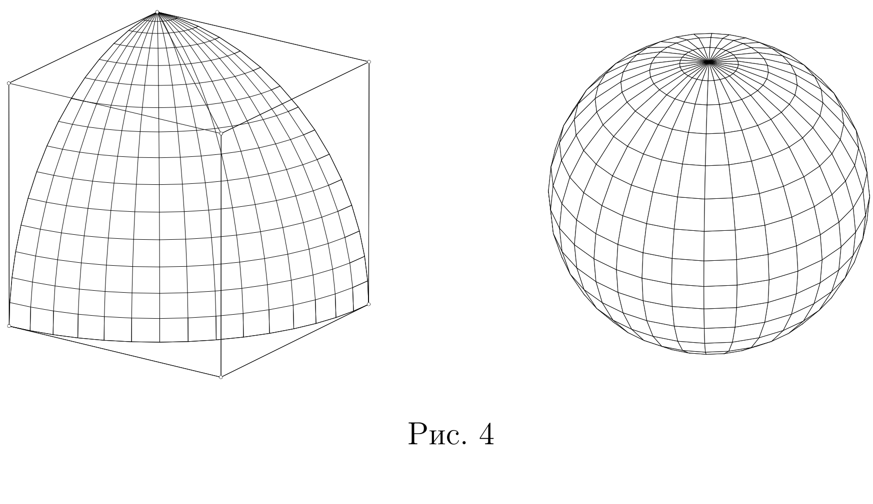

Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. №11. С. 1962-1971.

2. Farin G. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. Academic Press, 2002.

3. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Можно ли построить окружность с помощью кривых Безье?* // Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ». Избранные доклады. 19 декабря 2006 г.

   `http://dha.spb.ru/reps06.shtml#1216`