РАЗБИЕНИЕ КРИВЫХ БЕЗЬЕ*

В. Н. Малозёмов

malv@gamma.math.spbu.ru

3 июня 2006 г.

Данный доклад является добавлением к [1]. Здесь дается новое обоснование процедуры разбиения кривых Безье, которая называется «subdivision» [2, с. 68-70]. Кроме того, рассматривается вопрос об экстраполяции кривых Безье.

1°. Возьмём произвольные вещественные числа $y_0, y_1, \ldots, y_n$ и построим треугольный массив полиномов в форме Бернштейна

$$B_{ik}(x) = \sum_{\alpha=0}^{i} y_{k+\alpha} p_{i\alpha}(x), \quad i \in 0:n,\ k \in 0:n-i,$$

где $p_{i\alpha}(x) = C_i^\alpha x^\alpha (1-x)^{i-\alpha}$, $i \in 1:n$, $\alpha \in 0:i$; $p_{00}(x) \equiv 1$ (рис. 1).

$$\begin{array}{lllll}
B_{00} & B_{01} & \ldots & B_{0,n-1} & B_{0,n} \\
B_{10} & B_{11} & \ldots & B_{1,n-1} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
B_{n-1,0} & B_{n-1,1} & & & \\
B_{n0} & & & &
\end{array}$$

Рис. 1.

Ясно, что $B_{0k}(x) \equiv y_k$ при $k \in 0:n$ и $B_{n0}(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} y_\alpha p_{n\alpha}(x) =: B_n(x)$.

Введём полюсы $Y_k = (k/n, y_k)$, $k \in 0:n$, и при фиксированном x сформируем треугольный массив $\{Y_k^{(i)}\}$ по классической схеме последовательных линейных интерполяций:

$$\begin{aligned}
&Y_k^{(i)} = (1-x)Y_k^{(i-1)} + xY_{k+1}^{(i-1)}, \quad i \in 1:n,\ k \in 0:n-i; \\
&Y_k^{(0)} = Y_k, \quad k \in 0:n.
\end{aligned} \tag{1}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедлива формула*

$$Y_k^{(i)} = \left(\tfrac{ix+k}{n}, B_{ik}(x)\right), \quad i \in 0:n,\ k \in 0:n-i. \tag{2}$$

Доказательство. При $i = 0$ утверждение тривиально. При $i = 1$ согласно (1) имеем: по первой координате

$$(1-x)\tfrac{k}{n} + x\tfrac{k+1}{n} = \tfrac{x+k}{n};$$

по второй координате

$$(1-x)y_k + xy_{k+1} = y_k p_{10}(x) + y_{k+1}p_{11}(x) = B_{1k}(x).$$

Таким образом, при $i = 1$ равенство (2) выполняется.

Сделаем индукционный переход от $i-1$ к i, $i \geq 2$. Легко разобраться с первой координатой. Согласно индукционному предположению

$$(1-x)\tfrac{(i-1)x+k}{n} + x\tfrac{(i-1)x+k+1}{n} = \tfrac{ix+k}{n}.$$

Переходя ко второй координате, отметим, что базисные полиномы Бернштейна $p_{i\alpha}(x)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
&p_{i\alpha} = (1-x)p_{i-1,\alpha} + xp_{i-1,\alpha-1}, \quad i \in 2:n,\ \alpha \in 1:i-1;\\
&p_{i0} = (1-x)p_{i-1,0}, \quad p_{ii} = xp_{i-1,i-1}, \quad i \in 1:n;\\
&p_{00} \equiv 1.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{gathered}
(1-x)B_{i-1,k}(x) + xB_{i-1,k+1}(x) = \\
= (1-x)\sum_{\alpha=0}^{i-1} y_{k+\alpha}p_{i-1,\alpha} + x\sum_{\alpha=0}^{i-1} y_{k+1+\alpha}p_{i-1,\alpha} = \\
= (1-x)y_k p_{i-1,0} + \sum_{\alpha=1}^{i-1} y_{k+\alpha}\left[(1-x)p_{i-1,\alpha} + xp_{i-1,\alpha-1}\right] + \\
+ xy_{k+i}p_{i-1,i-1} = \sum_{\alpha=0}^{i} y_{k+\alpha}p_{i\alpha} = B_{ik}(x).
\end{gathered}$$

Предложение доказано. □

При $i = n$ из (2) следует, что $Y_0^{(n)} = (x, B_n(x))$. Это значит, что $Y_0^{(n)}$ есть точка графика полинома в форме Бернштейна $B_n(x)$.

Схема (1) позволяет построить график полинома $B_n(x)$ на отрезке $[0,1]$. Он представляет собой простейший вариант кривой Безье. На рис. 2 показано построение точки $(c, B_n(c))$ при $n = 3$ и приведён вид всей кривой Безье.

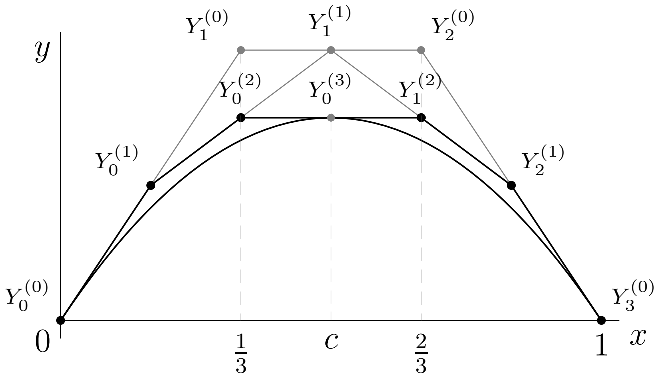

Рис. 2.

Непрерывная ломаная, соединяющая полюсы $Y_0^{(0)}, Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, Y_3^{(0)}$, называется характеристическим многоугольником данной кривой Безье. Напомним [1], что кривая Безье проходит через точки $Y_0^{(0)}$ и $Y_3^{(0)}$ и касается отрезка $[Y_0^{(0)}, Y_1^{(0)}]$ при $x = 0$, отрезка $[Y_2^{(0)}, Y_3^{(0)}]$ при $x = 1$ и отрезка $[Y_0^{(2)}, Y_1^{(2)}]$ при $x = c$.

Мы хотим доказать одно общее свойство кривых Безье, которое на рис. 2 соответствует тому, что непрерывная ломаная, соединяющая полюсы $Y_0^{(0)}, Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}, Y_0^{(3)}$, является характеристическим многоугольником дуги кривой Безье над отрезком $[0, c]$.

2°. Зафиксируем $c \in (0, 1)$ и обозначим $y_k^{(i)} = B_{ik}(c)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо тождество*

$$\sum_{i=0}^{n} y_0^{(i)} p_{ni}(x) = B_n(cx). \tag{3}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{\alpha=0}^{i} y_\alpha p_{i\alpha}(c) \Big) p_{ni}(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} y_\alpha \sum_{i=\alpha}^{n} p_{i\alpha}(c) p_{ni}(x).$$

Нужно проверить, что

$$\sum_{i=\alpha}^{n} p_{i\alpha}(c) p_{ni}(x) = p_{n\alpha}(cx).$$

Запишем

$$\sum_{i=\alpha}^{n} C_i^\alpha c^\alpha (1-c)^{i-\alpha} C_n^i x^i (1-x)^{n-i} =$$

$$= (cx)^\alpha \sum_{i=\alpha}^{n} C_i^\alpha C_n^i (x-cx)^{i-\alpha} (1-x)^{n-\alpha-(i-\alpha)} =$$

$$= (cx)^\alpha \sum_{i=0}^{n-\alpha} C_{i+\alpha}^\alpha C_n^{i+\alpha} (x-cx)^i (1-x)^{n-\alpha-i}.$$

Поскольку $C_{i+\alpha}^\alpha C_n^{i+\alpha} = C_n^\alpha C_{n-\alpha}^i$, то последнее выражение преобразуется к виду

$$C_n^\alpha (cx)^\alpha (1-cx)^{n-\alpha} = p_{n\alpha}(cx).$$

Предложение доказано. □

Обозначим $u = cx$. Тогда в силу (3)

$$\sum_{i=0}^{n} y_0^{(i)} p_{ni}\left(\tfrac{u}{c}\right) = B_n(u), \quad u \in [0, c]. \tag{4}$$

Зафиксируем $u \in (0, c)$, положим $x = u/c$ и рассмотрим полюсы

$$Z_i := Y_0^{(i)} = \left(\tfrac{ic}{n}, y_0^{(i)}\right), \quad i \in 0 : n. \tag{5}$$

Воспользуемся схемой (1) для полюсов $\{Z_k\}$ (мы поменяли индекс i на k) и параметра x:

$$\begin{aligned} &Z_k^{(i)} = (1-x) Z_k^{(i-1)} + x Z_{k+1}^{(i-1)}, \quad i \in 1 : n, \ k \in 0 : n-i; \\ &Z_k^{(0)} = Z_k, \quad k \in 0 : n. \end{aligned} \tag{6}$$

Получим $Z_0^{(n)} = (u, B_n(u))$. Действительно, по второй координате это равенство следует из (2) и (4), а по первой координате проверяется так же, как в предложении 1.

Схема (6) позволяет построить дугу кривой Безье над отрезком $[0, c]$ по полюсам $Y_0^{(0)}, Y_0^{(1)}, \ldots, Y_0^{(n)}$ вида (5).

3°. Аналогичный результат можно получить и для отрезка $[c, 1]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо тождество*

$$\sum_{i=0}^{n} y_i^{(n-i)} p_{ni}(x) = B_n(x + c(1-x)). \tag{7}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=0}^{n}\Bigl(\sum_{\alpha=0}^{n-i} y_{i+\alpha}p_{n-i,\alpha}(c)\Bigr)p_{ni}(x) = \sum_{i=0}^{n}\Bigl(\sum_{k=i}^{n} y_k p_{n-i,k-i}(c)\Bigr)p_{ni}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \sum_{i=0}^{k} p_{n-i,k-i}(c)p_{ni}(x).$$

Нужно проверить, что

$$\sum_{i=0}^{k} p_{n-i,k-i}(c)p_{ni}(x) = p_{nk}\bigl(x+c(1-x)\bigr).$$

Запишем

$$\sum_{i=0}^{k} C_{n-i}^{k-i}\, c^{k-i}(1-c)^{n-k}\, C_n^i\, x^i(1-x)^{n-i} =$$
$$= [(1-c)(1-x)]^{n-k}\sum_{i=0}^{k} C_{n-i}^{k-i}\, C_n^i \bigl(c(1-x)\bigr)^{k-i} x^i.$$

Поскольку $C_{n-i}^{k-i}C_n^i = C_n^k C_k^i$, то последнее выражение преобразуется к виду

$$[(1-c)(1-x)]^{n-k}\, C_n^k\bigl(x+c(1-x)\bigr)^k =$$
$$= C_n^k\bigl(x+c(1-x)\bigr)^k\bigl(1-(x+c(1-x))\bigr)^{n-k} = p_{nk}\bigl(x+c(1-x)\bigr).$$

Предложение доказано. □

Обозначим $u = x + c(1-x) = c + x(1-c)$. Тогда в силу (7)

$$\sum_{i=0}^{n} y_i^{(n-i)} p_{ni}\bigl(\tfrac{u-c}{1-c}\bigr) = B_n(u), \quad u \in [c,1]. \tag{8}$$

Зафиксируем $u \in (c,1)$, положим $x = (u-c)/(1-c)$ и рассмотрим полюсы

$$W_i := Y_i^{(n-i)} = \left(\tfrac{(n-i)c+i}{n}, y_i^{(n-i)}\right), \quad i \in 0:n. \tag{9}$$

Воспользуемся схемой (1) для полюсов $\{W_k\}$ (мы снова поменяли индекс i на k) и параметра x:

$$\begin{aligned} &W_k^{(i)} = (1-x)W_k^{(i-1)} + xW_{k+1}^{(i-1)}, \quad i \in 1:n,\ k \in 0:n-i;\\ &W_k^{(0)} = W_k, \quad k \in 0:n. \end{aligned} \tag{10}$$

Получим $W_0^{(n)} = (u, B_n(u))$. Действительно, по второй координате это равенство следует из (2) и (8). Что касается первой координаты, то так же, как в предложении 1, доказывается, что у вектора $W_k^{(i)}$ она равна $c + \frac{ix+k}{n}(1-c)$. В частности, у полюса $W_0^{(k)}$ она равна u.

Схема (10) позволяет построить дугу кривой Безье над отрезком $[c, 1]$ по полюсам $Y_0^{(n)}, Y_1^{(n-1)}, \ldots, Y_n^{(0)}$ вида (9).

4°. Перепишем соотношение (1) по второй координате при $x = c$:

$$\begin{aligned} &y_k^{(i)} = (1-c)y_k^{(i-1)} + cy_{k+1}^{(i-1)}, \quad i \in 1:n,\ k \in 0:n-i; \\ &y_k^{(0)} = y_k, \quad k \in 0:n. \end{aligned} \tag{11}$$

Согласно (2), $y_k^{(i)} = B_{ik}(c)$. По формуле (11) строка за строкой вычисляется треугольный массив $\{y_k^{(i)}\}$ (рис. 3):

$$\begin{array}{lllll} y_0^{(0)} & y_1^{(0)} & \cdots & y_{n-1}^{(0)} & y_n^{(0)} \\ y_0^{(1)} & y_1^{(1)} & \cdots & y_{n-1}^{(1)} & \\ \multicolumn{4}{l}{\dotfill} & \\ y_0^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & & & \\ y_0^{(n)} & & & & \end{array}$$

Рис. 3.

Базовой здесь является первая строка $y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$. По ней формируется первый столбец $y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(n)}$ и полюсы (5), а также наклонная строка $y_0^{(n)}, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(0)}$ и полюсы (9).

Полюсы (5) порождают дугу кривой Безье над отрезком $[0, c]$, а полюсы (9) — дугу той же кривой над отрезком $[c, 1]$.

Отметим, что формула (11) допускает обращение

$$y_{k+1}^{(i-1)} = y_k^{(i-1)} + \tfrac{1}{c}\big(y_k^{(i)} - y_k^{(i-1)}\big), \quad i = n, n-1, \ldots, 1,\ k = 0, 1, \ldots, n-i.$$

По данным первого столбца $y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(n)}$, которые теперь можно считать произвольными, вычисляются элементы как первой строки $y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, так и наклонной строки $y_0^{(n)}, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(0)}$. Полюсы $Z_k = \big(kc/n, y_0^{(k)}\big)$, $k \in 0:n$, определяют дугу кривой Безье над $[0, c]$, а полюсы $W_k = \Big(\frac{(n-k)c+k}{n}, y_k^{(n-k)}\Big)$, $k \in 0:n$, вычисленные по данным первого столбца, позволяют естественным образом построить продолжение кривой Безье над $[c, 1]$ (экстраполировать её).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье.* // http://www.dha.spb.ru/ Избранные доклады. 14 декабря 2004 г.

2. Farin G. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. San Diego: Academic Press, 2002. xvii+499 pp.