

КРОНЕКЕРОВО УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ И КОММУТАТИВНОСТЬ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

О. В. Просеков

sc2@pisem.net

21 августа 2007 г.

1°. Пусть A_n и B_m — квадратные матрицы порядков n и m соответственно и I_n — единичная матрица порядка n . Имеет место следующее свойство коммутативности [1]:

$$(A_n \otimes I_m)(I_n \otimes B_m) = (I_n \otimes B_m)(A_n \otimes I_m). \quad (1)$$

В левой и правой частях равенства (1) стоят разные разложения матрицы $A_n \otimes B_m$.

В данном докладе приводится обобщение формулы (1), важное для теории быстрого преобразования Фурье.

2°. Зафиксируем натуральное число $N = n_1 n_2 \cdots n_s$, где n_ν — натуральные числа, отличные от единицы, и введём обозначения

$$N_\nu = n_{\nu+1} n_{\nu+2} \cdots n_s, \quad \nu \in 0 : s-1; \quad N_s = 1; \\ \Delta_1 = 1; \quad \Delta_\nu = n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1}, \quad \nu \in 2 : s+1.$$

Очевидно, что $\Delta_\nu n_\nu N_\nu = N$ при всех $\nu \in 1 : s$.

Будем рассматривать только квадратные матрицы; нижний индекс указывает на их порядок.

ТЕОРЕМА. *Справедливо равенство*

$$\prod_{\nu=1}^s (A_{N_{\nu-1}}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}) \prod_{\nu=1}^s (I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}) \prod_{\nu=1}^s (I_{N_\nu} \otimes C_{\Delta_{\nu+1}}^{(\nu)}) = \\ = \prod_{\nu=1}^s (A_{N_{\nu-1}}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}) (I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}) (I_{N_\nu} \otimes C_{\Delta_{\nu+1}}^{(\nu)}). \quad (2)$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: <http://www.dha.spb.ru/>

3°. Предварительно установим три вспомогательных предложения.

ЛЕММА 1. При $\mu > \nu$

$$(A_{N_{\mu-1}}^{(\mu)} \otimes I_{\Delta_\mu})(I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}) = (I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu})(A_{N_{\mu-1}}^{(\mu)} \otimes I_{\Delta_\mu}). \quad (3)$$

Доказательство. Поскольку $I_{\Delta_\mu} = I_{n_{\nu+1} \dots n_{\mu-1}} \otimes I_{\Delta_{\nu+1}}$, то согласно (1)

$$\begin{aligned} & (A_{N_{\mu-1}}^{(\mu)} \otimes I_{\Delta_\mu})(I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}) = \\ & = ((A_{N_{\mu-1}}^{(\mu)} \otimes I_{n_{\nu+1} \dots n_{\mu-1}}) \otimes I_{\Delta_{\nu+1}})(I_{N_\nu} \otimes (B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu})) = \\ & = (I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu})(A_{N_{\mu-1}}^{(\mu)} \otimes I_{\Delta_\mu}). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 2. При $\mu < \nu$

$$(I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu})(I_{N_\mu} \otimes C_{\Delta_{\mu+1}}^{(\mu)}) = (I_{N_\mu} \otimes C_{\Delta_{\mu+1}}^{(\mu)})(I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}).$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $I_{N_\mu} = I_{N_{\nu-1}} \otimes I_{n_{\mu+1} \dots n_{\nu-1}}$. Согласно (1) получим

$$\begin{aligned} & (I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu})(I_{N_\mu} \otimes C_{\Delta_{\mu+1}}^{(\mu)}) = \\ & = ((I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu})(I_{N_{\nu-1}} \otimes (I_{n_{\mu+1} \dots n_{\nu-1}} \otimes C_{\Delta_{\mu+1}}^{(\mu)}))) = \\ & = (I_{N_\mu} \otimes C_{\Delta_{\mu+1}}^{(\mu)})(I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 3. При $\mu < \nu$

$$(A_{N_{\nu-1}}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu})(I_{N_\mu} \otimes C_{\Delta_{\mu+1}}^{(\mu)}) = (I_{N_\mu} \otimes C_{\Delta_{\mu+1}}^{(\mu)})(A_{N_{\nu-1}}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}).$$

Доказательство такое же, как в лемме 2. Матрица $I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)}$ заменена на $A_{N_{\nu-1}}^{(\nu)}$.

Замечание. Обозначим

$$D_N^{(\nu)} = (A_{N_{\nu-1}}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu})(I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}).$$

Последовательное применение лемм 2 и 3 приводит к равенству

$$D_N^{(\nu)} (I_{N_\mu} \otimes C_{\Delta_{\mu+1}}^{(\mu)}) = (I_{N_\mu} \otimes C_{\Delta_{\mu+1}}^{(\mu)}) D_N^{(\nu)} \quad \text{при } \mu < \nu. \quad (4)$$

4°. Обратимся к доказательству теоремы. В качестве первого шага установим, что

$$\prod_{\nu=1}^s (A_{N_{\nu-1}}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}) \prod_{\nu=1}^s (I_{N_\nu} \otimes B_{n_\nu}^{(\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}) = \prod_{\nu=1}^s D_N^{(\nu)}. \quad (5)$$

Возьмём последний сомножитель в первом произведении из левой части равенства (5). С помощью последовательного применения формулы (3) переместим его на позицию перед последним сомножителем второго произведения. Получим матрицу $D_N^{(s)}$. Точно так же сомножитель с индексом $\nu = s - 1$ первого произведения переместим на позицию перед сомножителем с индексом $\nu = s - 1$ второго произведения. Получим матрицу $D_N^{(s-1)}$. Продолжив аналогично, придём к равенству (5). При этом первый сомножитель из первого произведения остаётся на месте.

Второй шаг сводится к проверке равенства

$$\prod_{\nu=1}^s D_N^{(\nu)} \prod_{\nu=1}^s (I_{N_\nu} \otimes C_{\Delta_{\nu+1}}^{(\nu)}) = \prod_{\nu=1}^s D_N^{(\nu)} (I_{N_\nu} \otimes C_{\Delta_{\nu+1}}^{(\nu)}). \quad (6)$$

С помощью последовательного применения формулы (4) первый сомножитель во втором произведении из левой части равенства (6) переместим на позицию после первого сомножителя в первом произведении; второй сомножитель из второго произведения переместим на позицию после второго сомножителя из первого произведения и т. д. В результате придём к равенству (6). При этом последний сомножитель из второго произведения остаётся на месте.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Перестановки и кронекерово произведение матриц* // Секция «Дискретный гармонический анализ». Избранные доклады. 31 марта 2004 г. (<http://dha.spb.ru/rep04.shtml#0324>)