ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ РЕВЕРСНЫХ ПЕРЕСТАНОВОК*

В. Н. Малозёмов — malv@gamma.math.spbu.ru

О. В. Просеков — sc2@pisem.net

2 мая 2006 г.

1. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Пусть s и $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — натуральные числа, отличные от единицы. Введём обозначения

$$N = n_1 n_2 \cdots n_s\,; \quad N_\nu = n_{\nu+1} \cdots n_s \quad \text{при } \nu \in 0 : s-1\,; \quad N_s = 1\,;$$
$$\Delta_1 = 1\,; \quad \Delta_\nu = n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1} \quad \text{при } \nu \in 2 : s+1\,.$$

Очевидно, что $N_0 = N$ и $\Delta_{\nu+1} N_\nu = N$ при всех $\nu \in 0 : s$.

Любое число $i \in 0 : N-1$ с помощью последовательного деления можно единственным образом представить в виде

$$\begin{aligned} i = i_s(n_{s-1}n_{s-2}\cdots n_1) + i_{s-1}(n_{s-2}\cdots n_1) + \cdots + \\ + i_2\, n_1 + i_1 = \sum_{\nu=1}^{s} i_\nu\, \Delta_\nu\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $i_\nu \in 0 : n_\nu - 1$. Будем использовать компактную запись формулы (1.1):

$$i = (i_s, i_{s-1}, \ldots, i_1)_{n_s, n_{s-1}, \ldots, n_1}\,. \tag{1.2}$$

Правая часть (1.2) называется *смешанным кодом числа* i.

Числу i сопоставим число с ревертированным кодом

$$\operatorname{rev}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\big((i_s, i_{s-1}, \ldots, i_1)_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}\big) = (i_1, i_2, \ldots, i_s)_{n_1,n_2,\ldots,n_s} =$$
$$= i_1(n_2 n_3 \cdots n_s) + i_2(n_3 \cdots n_s) + \cdots + i_{s-1}\, n_s + i_s = \sum_{\nu=1}^{s} i_\nu\, N_\nu\,.$$

---

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Ясно, что $\mathrm{rev}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(i) \in 0:N-1$. Поскольку

$$\mathrm{rev}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(\mathrm{rev}_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}(j)) = j\,, \qquad j \in 0:N-1\,, \tag{1.3}$$

то преобразование $\mathrm{rev}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}$ является перестановкой множества $\{0,1,\ldots,N-1\}$.

Матрица реверсных перестановок определяется так:

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \mathrm{rev}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(i), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Индексы строк и столбцов матрицы $Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}$ изменяются от 0 до $N-1$.

Основным результатом данной статьи является следующая

ТЕОРЕМА. *Справедливы разложения*

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \prod_{\nu=1}^{s-1}\bigl(I_{\Delta_\nu} \otimes Rev_{n_\nu,N_\nu}\bigr)\,, \tag{1.4}$$

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \prod_{\nu=2}^{s}\bigl(I_{N_\nu} \otimes Rev_{\Delta_\nu,n_\nu}\bigr)\,, \tag{1.5}$$

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \prod_{\nu=1}^{s-1}\bigl(Rev_{n_{s-\nu},N_{s-\nu}} \otimes I_{\Delta_{s-\nu}}\bigr)\,, \tag{1.6}$$

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \prod_{\nu=2}^{s}\bigl(Rev_{\Delta_{s-\nu+2},n_{s-\nu+2}} \otimes I_{N_{s-\nu+2}}\bigr)\,. \tag{1.7}$$

Здесь $I_n = I_n[0:n-1, 0:n-1]$ — единичная матрица n-го порядка и $\otimes$ — знак кронекерова умножения матриц.

В правой части формул (1.4)–(1.7) присутствуют матрицы Rev, зависящие только от двух параметров.

Матрицы реверсных перестановок используются в теории быстрых ортогональных преобразований [1–4].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Сначала разберёмся с матрицами реверсных перестановок, зависящими от двух параметров. Согласно определению

$$\mathrm{rev}_{n_1,n_2}(i_2\,n_1 + i_1) = i_1\,n_2 + i_2\,,$$

где $i_\nu \in 0:n_\nu-1$. Соответственно

$$Rev_{n_1,n_2}[i_2\,n_1+i_1, j_1\,n_2+j_2] = \begin{cases} 1 & \text{при } j_1=i_1,\ j_2=i_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вектор $X = Rev_{n_1,n_2}\,x$ имеет следующие компоненты:

$$X = \Big(x(0), x(n_2), \ldots, x\big((n_1-1)\,n_2\big), x(1), x(n_2+1), \ldots, x\big((n_1-1)\,n_2+1\big),$$
$$\ldots, x(n_2-1), x(2n_2-1), \ldots, x\big(n_1n_2-1\big)\Big)\,.$$

Действие матрицы Rev_{n_1,n_2} можно пояснить на неформальном уровне. Для этого одномерный массив x представим в виде таблицы

$$\begin{array}{cccc} x(0), & x(1), & \ldots, & x(n_2-1), \\ x(n_2), & x(n_2+1), & \ldots, & x(2n_2-1), \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x\big((n_1-1)\,n_2\big), & x\big((n_1-1)\,n_2+1\big), & \ldots, & x(n_1n_2-1)\,. \end{array}$$

Вектор $X = Rev_{n_1,n_2}\,x$ получится, если столбцы этой таблицы поочерёдно записать в одномерный массив.

2.2. Обратимся к общей матрице реверсных перестановок.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$\big(Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\big)^T = Rev_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}\,. \tag{2.1}$$

Доказательство. Поскольку $Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}$ — матрица перестановок, то

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\big(Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\big)^T = I_N\,. \tag{2.2}$$

Покажем, что

$$Rev_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1} Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = I_N\,. \tag{2.3}$$

Отсюда и из (2.2) будет следовать (2.1).

Запишем выражение для элемента с индексами (i,j) матрицы из левой части (2.3):

$$\sum_{k=0}^{N-1} Rev_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}[i,k] \times Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}[k,j] = Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\big[\mathrm{rev}_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}(i), j\big]\,.$$

Это выражение равно единице при $j = \mathrm{rev}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\big(\mathrm{rev}_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}(i)\big)$ или, в силу (1.3), при $j=i$; в остальных случаях оно равно нулю. Данное наблюдение соответствует (2.3). Лемма доказана. □

2.3. Возьмём, число $i = (i_\nu, i_{\nu-1}, \ldots, i_1)_{n_\nu, n_{\nu-1}, \ldots, n_1} = j\, n_1 + i_1$, где $j = (i_\nu, i_{\nu-1}, \ldots, i_2)_{n_\nu, n_{\nu-1}, \ldots, n_2}$.

ЛЕММА 2. *Пусть* $i = j\, n_1 + i_1$. *Тогда*

$$\mathrm{rev}_{n_1, n_2 \ldots, n_\nu}(i) = i_1\,(n_2 n_3 \cdots n_\nu) + \mathrm{rev}_{n_2, \ldots, n_\nu}(j)\,. \tag{2.4}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered} i_1\,(n_2 n_3 \cdots n_\nu) + \mathrm{rev}_{n_2, \ldots, n_\nu}((i_\nu, i_{\nu-1}, \ldots, i_2)_{n_\nu, n_{\nu-1}, \ldots, n_2}) = \\ = i_1\,(n_2 n_3 \cdots n_\nu) + (i_2, i_3, \ldots, i_\nu)_{n_2, n_3, \ldots, n_\nu} = (i_1, i_2, \ldots, i_\nu)_{n_1, n_2, \ldots, n_\nu} = \\ = \mathrm{rev}_{n_1, n_2 \ldots, n_\nu}(i)\,, \end{gathered}$$

что равносильно (2.4). □

2.4. Напомним определение и некоторые свойства кронекерова умножения квадратных матриц [5, с. 80–82].

Кронекеровым произведением матриц $A_m = A_m[0 : m-1, 0 : m-1]$ и $B_n = B_n[0 : n-1, 0 : n-1]$ называется матрица $D_{mn} = A_m \otimes B_n$ с элементами

$$D_{mn}[i\, n + j, i'\, n + j'] = A_m[i, i']B_n[j, j']\,, \quad i, i' \in 0 : m-1\,,\ \ j, j' \in 0 : n-1\,.$$

Операция кронекерова умножения ассоциативна.

Покажем, что

$$Rev_{m,n}\big(A_m \otimes B_n\big) = \big(B_n \otimes A_m\big) Rev_{m,n}\,. \tag{2.5}$$

Сравним элементы с индексами $(i_2\, m + i_1, i'_1\, n + i'_2)$, где $i_1, i'_1 \in 0 : m-1$, $i_2, i'_2 \in 0 : n-1$. Запишем

$$\begin{aligned} &\Big(Rev_{m,n}\big(A_m \otimes B_n\big)\Big)[i_2\, m + i_1, i'_1\, n + i'_2] = \\ &\quad = \sum_{k_1=0}^{m-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} Rev_{m,n}[i_2\, m + i_1, k_1\, n + k_2] \times \big(A_m \otimes B_n\big)[k_1\, n + k_2, i'_1\, n + i'_2] = \\ &\qquad\qquad = \big(A_m \otimes B_n\big)[i_1\, n + i_2, i'_1\, n + i'_2] = A_m[i_1, i'_1]\, B_n[i_2, i'_2]\,. \end{aligned}$$

Вместе с тем,

$$\begin{aligned} &\Big(\big(B_n \otimes A_m\big) Rev_{m,n}\Big)[i_2\, m + i_1, i'_1\, n + i'_2] = \\ &\quad = \sum_{k_1=0}^{m-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} \big(B_n \otimes A_m\big)[i_2\, m + i_1, k_2\, m + k_1] \times Rev_{m,n}[k_2\, m + k_1, i'_1\, n + i'_2] = \\ &\qquad\qquad = \big(B_n \otimes A_m\big)[i_2\, m + i_1, i'_2\, m + i'_1] = B_n[i_2, i'_2]\, A_m[i_1, i'_1]\,. \end{aligned}$$

Равенство (2.5) установлено.

Умножим обе части (2.5) слева на $Rev_{n,m}$. Согласно (2.3) получим

$$A_m \otimes B_n = Rev_{n,m}\big(B_n \otimes A_m\big)Rev_{m,n}\,. \tag{2.6}$$

Нам потребуются ещё два свойства кронекерова умножения:

$$\big(A_m \otimes B_n\big)^T = A_m^T \otimes B_n^T\,;$$

для пар квадратных матриц $A_m^{(\nu)}$, $B_n^{(\nu)}$, $\nu \in 1:s$, порядков m и n соответственно справедлива формула

$$\prod_{\nu=1}^{s}\big(A_m^{(\nu)} \otimes B_n^{(\nu)}\big) = \left(\prod_{\nu=1}^{s} A_m^{(\nu)}\right) \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s} B_n^{(\nu)}\right).$$

В частности, если все $A_m^{(\nu)}$ равны I_m, то

$$\prod_{\nu=1}^{s}\big(I_m \otimes B_n^{(\nu)}\big) = I_m \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s} B_n^{(\nu)}\right). \tag{2.7}$$

3. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

ЛЕММА 3. *При $\nu = 3, 4, \ldots, s$ справедливо рекуррентное соотношение*

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu} = Rev_{n_1,n_2\cdots n_\nu}\big(I_{n_1} \otimes Rev_{n_2,\ldots,n_\nu}\big)\,. \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим $N^{(\nu)} = n_1 n_2 \cdots n_\nu$, $N_1^{(\nu)} = n_2 \cdots n_\nu$. Возьмём произвольный вектор x с множеством индексов $0 : N^{(\nu)} - 1$ и покажем, что

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}\, x = Rev_{n_1,n_2\cdots n_\nu}\big(I_{n_1} \otimes Rev_{n_2,\ldots,n_\nu}\big)\, x\,. \tag{3.2}$$

Отсюда будет следовать (3.1).

Сравним компоненты векторов $X = Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}\, x$ и $Z = Rev_{n_1,N_1^{(\nu)}}\, Y$, где $Y = \big(I_{n_1} \otimes Rev_{n_2,\ldots,n_\nu}\big)\, x$. Как и в п. 2.3 зафиксируем индекс $i = (i_\nu, i_{\nu-1}, \ldots, i_1)_{n_\nu,n_{\nu-1},\ldots,n_1} = j\, n_1 + i_1$. Имеем

$$X(i) = x\big(\mathrm{rev}_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}(i)\big)\,,$$
$$Z(i) = Z(j\, n_1 + i_1) = Y(i_1\, N_1^{(\nu)} + j)\,.$$

В силу (2.4)

$$Y(i_1\, N_1^{(\nu)} + j) = \sum_{i_1'=0}^{n_1-1}\sum_{j'=0}^{N_1^{(\nu)}-1}\big(I_{n_1} \otimes Rev_{n_2,\ldots,n_\nu}\big)[i_1\, N_1^{(\nu)} + j, i_1'\, N_1^{(\nu)} + j'] \times$$

$$\times x(i_1'\, N_1^{(\nu)} + j') = \sum_{i_1'=0}^{n_1-1}\sum_{j'=0}^{N_1^{(\nu)}-1} I_{n_1}[i_1, i_1'] \times Rev_{n_2,\ldots,n_\nu}[j, j'] \times x(i_1'\, N_1^{(\nu)} + j') =$$

$$= x\big(i_1\,(n_2 n_3 \cdots n_\nu) + \mathrm{rev}_{n_2,\dots,n_\nu}(j)\big) = x\big(\mathrm{rev}_{n_1,n_2,\dots,n_\nu}(i)\big)\,.$$

Значит, $Z(i) = X(i)$. Равенство (3.2), равносильное утверждению леммы, установлено. $\square$

Лемма 3 порождает ещё три рекуррентных соотношения:

$$Rev_{n_1,n_2,\dots,n_\nu} = \big(I_{n_\nu} \otimes Rev_{n_1,\dots,n_{\nu-1}}\big) Rev_{\Delta_\nu,n_\nu}\,, \tag{3.3}$$

$$Rev_{n_1,n_2,\dots,n_\nu} = \big(Rev_{n_2,\dots,n_\nu} \otimes I_{n_1}\big) Rev_{n_1,n_2\cdots n_\nu}\,, \tag{3.4}$$

$$Rev_{n_1,n_2,\dots,n_\nu} = Rev_{\Delta_\nu,n_\nu}\big(Rev_{n_1,\dots,n_{\nu-1}} \otimes I_{n_\nu}\big)\,. \tag{3.5}$$

Проверим их.

Согласно (3.1)

$$Rev_{n_\nu,n_{\nu-1},\dots,n_1} = Rev_{n_\nu,\Delta_\nu}\big(I_{n_\nu} \otimes Rev_{n_{\nu-1},\dots,n_1}\big)\,.$$

Перейдём к транспонированным матрицам и воспользуемся формулой (2.1). Получим (3.3).

Соотношение (3.4) выводится из (3.1) с помощью (2.6) и (2.3). Действительно,

$$\begin{aligned} Rev_{n_1,n_2,\dots,n_\nu} &= Rev_{n_1,N_1^{(\nu)}}\Big[Rev_{N_1^{(\nu)},n_1}\big(Rev_{n_2,\dots,n_\nu} \otimes I_{n_1}\big) Rev_{n_1,N_1^{(\nu)}}\Big] = \\ &= \big(Rev_{n_2,\dots,n_\nu} \otimes I_{n_1}\big) Rev_{n_1,n_2\cdots n_\nu}\,. \end{aligned}$$

Аналогичным образом (3.5) выводится из (3.3).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

4.1. На основании (3.1) и (2.7) последовательно получаем

$$\begin{aligned} Rev_{n_1,n_2,\dots,n_s} &= Rev_{n_1,N_1}\big(I_{n_1} \otimes Rev_{n_2,\dots,n_s}\big) = \\ &= \big(I_{\Delta_1} \otimes Rev_{n_1,N_1}\big)\big(I_{\Delta_2} \otimes Rev_{n_2,\dots,n_s}\big)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\Delta_2} \otimes Rev_{n_2,n_3,\dots,n_s} &= I_{\Delta_2} \otimes \Big[Rev_{n_2,N_2}\big(I_{n_2} \otimes Rev_{n_3,\dots,n_s}\big)\Big] = \\ &= \big(I_{\Delta_2} \otimes Rev_{n_2,N_2}\big)\big(I_{\Delta_3} \otimes Rev_{n_3,\dots,n_s}\big)\,, \end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned} I_{\Delta_{s-2}} \otimes Rev_{n_{s-2},n_{s-1},n_s} &= I_{\Delta_{s-2}} \otimes \Big[Rev_{n_{s-2},N_{s-2}}\big(I_{n_{s-2}} \otimes Rev_{n_{s-1},n_s}\big)\Big] = \\ &= \big(I_{\Delta_{s-2}} \otimes Rev_{n_{s-2},N_{s-2}}\big)\big(I_{\Delta_{s-1}} \otimes Rev_{n_{s-1},N_{s-1}}\big)\,. \end{aligned}$$

Объединив эти формулы, придём к (1.4).

Разложения (1.5)–(1.7) выводятся из (3.3)–(3.5) по аналогичной схеме. Разберёмся, например, с (1.6). Согласно (3.4)

$$\begin{aligned} Rev_{n_1,n_2,\dots,n_s} &= \big(Rev_{n_2,\dots,n_s} \otimes I_{n_1}\big) Rev_{n_1,N_1} = \\ &= \big(Rev_{n_2,\dots,n_s} \otimes I_{\Delta_2}\big)\big(Rev_{n_1,N_1} \otimes I_{\Delta_1}\big)\,, \\ Rev_{n_2,n_3,\dots,n_s} \otimes I_{\Delta_2} &= \Big[\big(Rev_{n_3,\dots,n_s} \otimes I_{n_2}\big) Rev_{n_2,N_2}\Big] \otimes I_{\Delta_2} = \\ &= \big(Rev_{n_3,\dots,n_s} \otimes I_{\Delta_3}\big)\big(Rev_{n_2,N_2} \otimes I_{\Delta_2}\big)\,, \end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned} Rev_{n_{s-2},n_{s-1},n_s} \otimes I_{\Delta_{s-2}} &= \Big[\big(Rev_{n_{s-1},n_s} \otimes I_{n_{s-2}}\big) Rev_{n_{s-2},N_{s-2}}\Big] \otimes I_{\Delta_{s-2}} = \\ &= \big(Rev_{n_{s-1},N_{s-1}} \otimes I_{\Delta_{s-1}}\big)\big(Rev_{n_{s-2},N_{s-2}} \otimes I_{\Delta_{s-2}}\big)\,. \end{aligned}$$

Объединив эти формулы, придём к (1.6).

4.2. Дадим простое доказательство ещё одного принципиального результата. Пусть $A^{(1)}_{n_1}, A^{(2)}_{n_2}, \dots, A^{(s)}_{n_s}$ — квадратные матрицы, причём $A^{(k)}_{n_k}$ имеет порядок n_k. Тогда

$$\begin{gathered} A^{(1)}_{n_1} \otimes A^{(2)}_{n_2} \otimes \dots \otimes A^{(s)}_{n_s} = \\ = Rev_{n_s,n_{s-1},\dots,n_1}\big(A^{(s)}_{n_s} \otimes A^{(s-1)}_{n_{s-1}} \otimes \dots \otimes A^{(1)}_{n_1}\big) Rev_{n_1,n_2,\dots,n_s}\,. \end{gathered} \tag{4.1}$$

При $s = 2$ формула (4.1) соответствует (2.6). Сделаем индукционный переход от $s-1$ к s.

На основании (2.6), (2.7) и индукционного предположения имеем

$$\begin{gathered} \big(A^{(1)}_{n_1} \otimes A^{(2)}_{n_2} \otimes \dots \otimes A^{(s-1)}_{n_{s-1}}\big) \otimes A^{(s)}_{n_s} = Rev_{n_s,\Delta_s}\Big(I_{n_s} A^{(s)}_{n_s} I_{n_s} \otimes \\ \otimes \big[Rev_{n_{s-1},\dots,n_2,n_1}\big(A^{(s-1)}_{n_{s-1}} \otimes \dots \otimes A^{(2)}_{n_2} \otimes A^{(1)}_{n_1}\big) Rev_{n_1,n_2,\dots,n_{s-1}}\big]\Big) Rev_{\Delta_s,n_s} = \\ = Rev_{n_s,\Delta_s}\big(I_{n_s} \otimes Rev_{n_{s-1},\dots,n_2,n_1}\big)\big(A^{(s)}_{n_s} \otimes A^{(s-1)}_{n_{s-1}} \otimes \dots \otimes A^{(1)}_{n_1}\big) \times \\ \times \big(I_{n_s} \otimes Rev_{n_1,n_2,\dots,n_{s-1}}\big) Rev_{\Delta_s,n_s}\,. \end{gathered} \tag{4.2}$$

В силу (3.3)

$$\big(I_{n_s} \otimes Rev_{n_1,n_2,\dots,n_{s-1}}\big) Rev_{\Delta_s,n_s} = Rev_{n_1,n_2,\dots,n_s}\,. \tag{4.3}$$

Транспонируем матрицы в обеих частях этого равенства. Получим

$$Rev_{n_s,\Delta_s}\big(I_{n_s} \otimes Rev_{n_{s-1},\dots,n_2,n_1}\big) = Rev_{n_s,\dots,n_2,n_1}\,. \tag{4.4}$$

Подставив (4.3) и (4.4) в (4.2), придём к (4.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Власенко В. А., Лаппа Ю. М., Ярославский Л. П. *Методы синтеза быстрых алгоритмов свёртки и спектрального анализа сигналов.* М.: Наука, 1990. 180 с.

2. Johnson J., Johnson R. W., Rodriguez D., Tolimieri R. *A methodology for designing, modifying and implementing Fourier transform algorithms on various architectures* // Circuits, Systems and Signal Processing. 1990. V. 9. No. 4. P. 449–500.

3. Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина-Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 1. С. 111–157.

4. Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Части 1–3. СПб.: НИИММ, 2003. 320 с.

5. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления.* М.: Наука, 1984. 320 с.