ОБ УНИТАРНЫХ МАТРИЦАХ И СИНГУЛЯРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ*

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

Н. А. Соловьёва — vinyo@mail.ru

30 января 2008 г.

Пусть n — натуральное число, $N = 1 : n$ и $E = E[N, N]$ — единичная матрица. Напомним, что матрица $U = U[N, N]$ с комплексными элементами называется унитарной, если

$$U^*U = UU^* = E\,.$$

Приводимое ниже утверждение потребовалось в теории конечномерных фреймов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Рассмотрим две системы* $\{a_k\}_{k=1}^m$ *и* $\{b_k\}_{k=1}^m$ *векторов из* $\mathbb{C}^n$. *Для того чтобы существовала унитарная матрица* U, *такая, что*

$$a_k = U\,b_k\,, \qquad k \in 1 : m\,,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\langle a_k, a_s\rangle = \langle b_k, b_s\rangle \quad \textit{при всех} \quad k, s \in 1 : m\,. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость очевидна.
Достаточность. Введём матрицы A и B со столбцами $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_m$ соответственно. Тогда условие (1) можно переписать в виде

$$A^*A = B^*B =: D\,.$$

Требуется доказать, что существует унитарная матрица U, такая, что $A = UB$.

Обозначим через r ранг матрицы D. Такой же ранг имеют матрицы A и B. Если $r = 0$, то матрицы A и B — нулевые. В этом случае в качестве U можно взять любую унитарную матрицу.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

Пусть $r \geqslant 1$. Обозначим $M = 1 : m$, $R = 1 : r$. Матрица $D = D[M, M]$ — эрмитова. Кроме того, она неотрицательно определена. Значит, для D существует представление

$$D = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, \varphi_k \, \varphi_k^* \,, \tag{2}$$

в котором $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — ортонормированные собственные векторы и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — неотрицательные собственные числа, среди которых r положительных. Обозначим $\vartheta_k = \sqrt{\lambda_k}$ и упорядочим ϑ_k по убыванию:

$$\vartheta_1 \geqslant \vartheta_2 \geqslant \cdots \geqslant \vartheta_r > 0 = \vartheta_{r+1} = \cdots = \vartheta_m \,.$$

Убрав из правой части (2) нулевые слагаемые, получим

$$D = \sum_{k=1}^{r} \vartheta_k^2 \, \varphi_k \, \varphi_k^* \,. \tag{3}$$

Введём унитарную матрицу $\varPhi[M, M]$ со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и диагональную матрицу $\varTheta[R, R]$ с положительными диагональными элементами $\varTheta[i, i] = \vartheta_i$, $i \in 1 : r$. С помощью матриц $\varPhi$ и $\varTheta$ формулу (3) можно переписать так:

$$D[M, M] = \varPhi[M, R] \times \varTheta^2[R, R] \times \varPhi^*[R, M] \,. \tag{4}$$

Умножим обе части последнего равенства справа на $\varPhi[M, R] \times \varTheta^{-1}[R, R]$. Учитывая, что $D = A^* A$, получаем

$$A^*[M, N] \times A[N, M] \times \varPhi[M, R] \times \varTheta^{-1}[R, R] = \varPhi[M, R] \times \varTheta[R, R] \,.$$

Обозначив

$$\varPsi[N, R] = A[N, M] \times \varPhi[M, R] \times \varTheta^{-1}[R, R] \,,$$

придём к формуле

$$A^*[M, N] \times \varPsi[N, R] = \varPhi[M, R] \times \varTheta[R, R] \,. \tag{5}$$

Добавим к матрице $\varTheta[R, R]$ нулевой блок $\varTheta[M \backslash R, R]$. С помощью расширенной матрицы $\varTheta[M, R]$ равенству (5) можно придать следующий вид:

$$A^*[M, N] \times \varPsi[N, R] = \varPhi[M, M] \times \varTheta[M, R] \,. \tag{6}$$

Покажем, что столбцы $\psi_1, \ldots, \psi_r$ матрицы $\varPsi[N, R]$ ортонормированные. Согласно (4) имеем

$$\begin{gathered} \varPsi^*[R, N] \times \varPsi[N, R] = \varTheta^{-1}[R, R] \times \varPhi^*[R, M] \times \big(A^*[M, N] \times A[N, M] \big) \times \\ \times \, \varPhi[M, R] \times \varTheta^{-1}[R, R] = \varTheta^{-1}[R, R] \times \big(\varPhi^*[R, M] \times \varPhi[M, R] \big) \times \varTheta^2[R, R] \times \\ \times \big(\varPhi^*[R, M] \times \varPhi[M, R] \big) \times \varTheta^{-1}[R, R] = E[R, R] \,, \end{gathered}$$

что и требовалось установить.

Расширим матрицу $\Psi[N,R]$ с ортонормированными столбцами $\psi_1,\dots,\psi_r$ до унитарной. Для этого прежде всего отметим, что векторы ψ_k являются собственными векторами матрицы AA^*. Действительно, согласно (5)

$$A[N,M]\times A^*[M,N]\times\Psi[N,R]=A[N,M]\times\Phi[M,R]\times\Theta[R,R]= \\ =\Psi[N,R]\times\Theta^2[R,R]\,.$$

Получили, что

$$\bigl(AA^*\bigr)\,\psi_k=\vartheta_k^2\,\psi_k\,,\qquad k\in 1:r\,. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим подпространство $\mathcal{L}=\bigl\{x\mid A^*x=\mathbb{O}\bigr\}$. Поскольку $\operatorname{rank}A^*= =r$, то размерность $\mathcal{L}$ равна $n-r$. Возьмём в $\mathcal{L}$ ортонормированный базис $\psi_{r+1},\dots,\psi_n$. Отметим, что

$$\langle\psi_k,\psi_s\rangle=0\quad\text{при}\quad k\in 1:r\,,\quad s\in r+1:n\,.$$

Действительно, согласно (7)

$$\langle\psi_k,\psi_s\rangle=\vartheta_k^{-2}\,\langle AA^*\,\psi_k,\psi_s\rangle=\vartheta_k^{-2}\,\langle A^*\,\psi_k,A^*\,\psi_s\rangle=0\,.$$

Дополнив матрицу $\Psi[N,R]$ столбцами $\psi_{r+1},\dots,\psi_n$, получим унитарную матрицу $\Psi[N,N]$.

Вернёмся к базовой формуле (6). Дополним матрицу $\Theta[M,R]$ нулевым блоком $\Theta[M,N\setminus R]$. Придём к равенству

$$A^*[M,N]\times\Psi[N,N]=\Phi[M,M]\times\Theta[M,N]\,.$$

Из него следует, что

$$A^*[M,N]=\Phi[M,M]\times\Theta[M,N]\times\Psi^*[N,N]\,.$$

После перехода к сопряжённым матрицам получим разложение

$$A[N,M]=\Psi[N,N]\times\Theta^*[N,M]\times\Phi^*[M,M]\,. \tag{8}$$

В этом разложении матрицы Φ и Θ зависят только от D, а матрица Ψ — от A и D. Отметим также, что матрица $\Theta^*[N,M]$ имеет ровно r ненулевых элементов $\Theta^*[k,k]=\vartheta_k$, $k\in 1:r$. Остальные элементы равны нулю.

Формула (8) является следствием равенства $D=A^*A$. Равенство $D=B^*B$ аналогичным образом приводит к разложению

$$B[N,M]=\Psi_0[N,N]\times\Theta^*[N,M]\times\Phi^*[N,N]\,, \tag{9}$$

в котором матрицы Φ^* и Θ^* такие же, как в (8). На основании (8) и (9) получаем

$$A[N,M]=\Psi[N,N]\times\Psi_0^*[N,N]\times B[N,M]\,.$$

Матрица $U=\Psi\,\Psi_0^*$ — унитарная. Она обеспечивает требуемое равенство $A= =UB$. Предложение доказано. □

СЛЕДСТВИЕ. *Если a, b — векторы из $\mathbb{C}^n$ с одинаковыми нормами, то существует унитарная матрица U, такая, что*

$$a = U\,b.$$

ЗАМЕЧАНИЯ.

1) По ходу доказательства предложения было, по существу, установлено, что векторы $\psi_1, \ldots, \psi_r, \psi_{r+1}, \ldots, \psi_n$ являются собственными векторами матрицы AA^*, соответствующими собственным числам

$$\vartheta_1^2 \geqslant \vartheta_2^2 \geqslant \cdots \geqslant \vartheta_r^2 > 0 = \vartheta_{r+1}^2 = \cdots = \vartheta_n^2\,.$$

2) Формула (8) называется сингулярным разложением матрицы A. При выводе этой формулы мы следовали рассуждениям из [1, с. 55–59].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 80 с.