ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ ВИЛЕНКИНА*

М. С. Беспалов

bespalov@vlsu.ru

7 февраля 2013 г.

Доклад служит продолжением доклада [1], в котором были приведены основы дискретного p-ичного гармонического анализа, и содержит дальнейшее обобщение на случай смешанных кодов. Некоторые элементы этого обобщения на случай дискретных функций Виленкина рассмотрены в докладе [2].

1°. Начнём с *функций Виленкина.* Считается, что они введены в 1947 г. в статье [3], а широкое внимание к себе привлекли после публикации обзора [4], в котором Н. Я. Виленкин упоминает про статьи Леви (1944) и Крестенсона (1955). Есть работы, где данную систему функций называют системой Прайса (статья которого вышла в 1957 г). В книге [5] предпочитают термин *мультипликативная система функций.* Но в зарубежной [6] и технической литературе применяют всё же термин *функции Виленкина.* Причем в технической литературе [7] этот термин применяют как для функций Виленкина, так и для дискретных функций Виленкина, не отмечая между ними различия.

Система функций Виленкина строится по последовательности $P = \{p_j\}$ простых чисел p_j. По ней строится другая возрастающая последовательность

$$m_0 = 1, \quad m_j = p_j m_{j-1}.$$

Аналогично построенному в [1] p-ичному разложению строится P-ичное n-значное разложение числа k (где $0 \leqslant k < m_n$):

$$k = \sum_{j=1}^{n} k_j\, m_{j-1}, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant k_j < p_j. \tag{1}$$

Для произвольного $x \in [0, 1)$ вычисляется его P-ичное разложение (где применён знак целой части числа):

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad \text{где} \quad x_j = \lfloor x \cdot m_j \rfloor \ (mod\, p_j). \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Отметим, что для P-ично рациональных, то есть чисел вида $\frac{k}{m_j}$, возможны два представления вида (2): финитное разложение, где встречается 0 в периоде (называют *правильным разложением*); и *особое разложение*, при котором начиная с некоторого разряда встречаются только максимально возможные разрядные значения $x_j = p_j - 1$. По указанному в (2) правилу $x_j = \lfloor x \cdot m_j \rfloor \ (mod\, p_j)$ получается правильное разложение. Если исключим все особые разложения P-ично рациональных чисел, то представление (2) для всех чисел единственно.

Часто [4–6] оставляют два представления для каждого P-ично рационального числа, что соответствует рассмотрению на модифицированном отрезке $[0,1]^*$, а не на полуинтервале $[0,1)$.

По разложениям $(1,2)$ *функции Виленкина* определяются так:

$$\psi_k(x) = \prod_{j=1}^{n} e^{2\pi i \frac{x_j k_j}{p_j}} = \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{k_j x_j}. \tag{3}$$

В случае одинаковых $p_j > 2$ это определение совпадает с функциями Крестенсона-Леви, а при $p_j \equiv 2$ это функции Уолша-Пэли (см. [5]) .

2°. Перейдём к *дискретным функциям Виленкина*. При заданном упорядоченном наборе $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ через разложение (1) чисел $k, s \in 0 : m_n - 1$ вычисляются значения дискретных функций Виленкина

$$\varphi_s(k) = \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{k_j s_j}, \qquad \text{где} \quad \omega_{p_j} = e^{\frac{2\pi i}{p_j}}, \tag{4}$$

в нумерации, отличной от предложенной Виленкиным [4].

В работах А. В. Ефимова и его учеников (см. [5]) *дискретные мультипликативные функции* τ_s (то есть дискретные функции Виленкина в нумерации Виленкина [4]) определяют через функции Виленкина (3):

$$\tau_s(k) = \psi_s(x) \qquad \text{при} \quad x \in \Delta_n^k = \Big[\frac{k}{m_n}, \frac{k+1}{m_n}\Big), \ s < m_n. \tag{5}$$

Возможен способ введения дискретных мультипликативных функций τ_s по формуле, аналогичной (4).

3°. Разложению (1) соответствует *P_n-ичный код* числа $k \in 0 : m_n - 1$:

$$\tilde{k} = (k_n \; k_{n-1} \ldots k_1),$$

и *обратный код* (он же *реверс* кода)

$$\operatorname{rev} \tilde{k} = (k_1 \; k_2 \; \ldots k_n),$$

являющийся P'_n-ичным кодом того же числа k, то есть вычисленным по той же формуле (1), но относительно *противоположного упорядоченного набора* $P'_n = \{p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1\}$. В кортежах $\tilde{k}$ и $\operatorname{rev}\tilde{k}$ младший разряд полагаем справа, а в наборах P_n и P'_n наоборот слева.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Правило, указанное в формуле* (2), *можно заменить на следующий алгоритм вычисления, где последовательность* $P = \{p_j\}$ *предполагается заданной.*

Пусть $l_0 := x$; $i := 1$.

Далее повторяем следующие вычисления:

$$x_i := \lfloor p_i \cdot l_{i-1} \rfloor, \quad l_i := p_i \cdot l_{i-1} - x_i, \quad i := i + 1.$$

Предложим аналогичный алгоритм вычисления прямого кода $\tilde{k}$ *для числа* $k \in 0 : m_n - 1$ *по заданному набору* $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Пусть $r_1 := k$. *Для* i *от* 1 *до* n *выполняем:*

$$k_i := r_i \ (mod\ p_i), \quad r_{i+1} := (r_i - k_i)/p_i.$$

Другой альтернативный алгоритм вычисления кода числа k.

Полагаем $t_n := k$.

Для j *от* n *до* 1 *выполняем: находим* k_j *— частное от деления* t_j *на* m_{j-1} *и* t_{j-1} *— остаток от этого деления. То есть* $t_j = k_j m_{j-1} + t_{j-1}$, $t_{j-1} < m_{j-1}$.

4°. Множество $M_n = \{0, 1, 2, \ldots, m_n - 1\}$ можно упорядочить в соответствии с возрастанием обратного кода и получить перестановку $\operatorname{rev} : M_n \to M_n$ этого множества. Так как перестановка реверс определяется по упорядоченному набору P_n *показателей разрядов*, то отметим это в обозначениях $\operatorname{rev}_{P_n}(k)$. Отображение $\operatorname{rev}_{P_n} : M_n \to M_n$ определим следующим образом.

По противоположному упорядоченному набору $P'_n = \{p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1\}$ аналогично получаем набор

$$m'_0 = 1, \quad m'_1 = p_n, \quad m'_2 = p_{n-1} m'_1, \ \ldots, \ m'_{j+1} = p_{n-j} m'_j, \ \ldots, \ m'_n = p_1 m'_{n-1}.$$

Тогда для $k \in M_n$ вида (1) вычисляем

$$\operatorname{rev}_{P_n}(k) = k_1 m'_{n-1} + k_2 m'_{n-2} + \ldots + k_{n-1} m'_1 + k_n. \tag{6}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Построенное отображение* $\operatorname{rev}_{P_n} : M_n \to M_n$ *биективно.*

Любое биективное отображение конечного множества задает перестановку этого множества. Применяются развернутая и сокращенная формы записи перестановки. Например, перестановка *реверс* множества $M_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ относительно набора $P_2 = \{2,3\}$ в развернутом виде записывается так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

а в сокращенном виде — $\mathrm{rev} = (0\,2\,4\,1\,3\,5)$. Степень перестановки определяется как композиция отображений. Поэтому, для рассмотренной перестановки $\mathrm{rev}^2 = (0\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5)$, $\mathrm{rev}^3 = (0\ 3\ 1\ 4\ 2\ 5)$ и лишь rev^4 есть тождественная перестановка.

Доказали на примере, что в отличии от случая дискретных функций Крестенсона, для смешанных кодов $\mathrm{rev}(\mathrm{rev}(k)) \neq k$ в общем случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В смешанных кодах обратная перестановка к перестановке реверс есть перестановка реверс относительно противоположного набора показателей разрядов*

$$(\mathrm{rev}_{P_n})^{-1} = \mathrm{rev}_{P'_n}\,.$$

Доказательство. Если $m = \mathrm{rev}_{P_n}(k)$, то процедура вычисления такая:

1) по заданному набору P_n вычисляем разрядные числа m_j;

2) представим k по формуле (1) относительно чисел m_j и вычисляем код $\tilde{k}$;

3) переставляя элементы в обратном порядке, записываем $\mathrm{rev}\,\tilde{k}$;

4) по противоположному набору P'_n вычисляются новые разрядные числа m'_j;

5) по формуле (6) вычисляем $m = \mathrm{rev}_{P_n}(k)$.

Опишем процедуру восстановления по числу m исходного числа k:

1) по набору P'_n вычисляем разрядные числа m'_j;

2) представим m по формуле (6) относительно чисел m'_j и вычисляем код $\tilde{m}$;

3) переставляя элементы в обратном порядке, записываем $\mathrm{rev}\,\tilde{m} = \tilde{k}$;

4) по противоположному набору P_n вычисляем новые разрядные числа m_j;

5) по формуле (1) вычисляем $k = \mathrm{rev}_{P'_n}(m)$. □

При более подробном доказательстве можно применить утверждение 1.

5°. Так как в формуле (5) приведен способ определения только первых m_n дискретных мультипликативных функций, то считаем, что и они задаются по конечному набору P_n. Для задания всей системы функций (3) этот набор может быть продолжен любым способом, что не влияет на определение (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Дискретные функции Виленкина* (4), *построенные по упорядоченному набору* P_n, *и дискретные мультипликативные функции* (5), *построенные по противоположному набору* P_n', *выражаются одна из другой через разные перестановки реверс*

$$\tau_z = \varphi_s; \qquad \text{где} \quad z = \mathrm{rev}_{P_n}(s), \; s = \mathrm{rev}_{P_n'}(z).$$

Доказательство. Для произвольного номера $s = \sum_{j=1}^{n} s_j\, m_{j-1}$ функции (4) имеем по (6):

$$\mathrm{rev}_{P_n}(s) = \sum_{j=1}^{n} s_j\, m'_{m-j} = \sum_{t=1}^{n} s_{n-t+1}\, m'_{t-1}.$$

Возьмём произвольное $k \in 0 : m_n - 1$ вида (1) и представим $x \in \Delta_n^k$ в виде $x = \frac{k}{m_n} + \delta$, где $\delta < m_n^{-1}$. Для этого x имеем

$$x = m_n^{-1} \sum_{j=1}^{n} k_j\, m_{j-1} + \delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{p_j p_{j+1} \dots p_n} + \delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{m'_{n-j+1}} + \delta.$$

То есть коэффициенты x'_{n-j+1} разложения (2) числа x по набору P_n' совпадают с коэффициентами разложения (1) числа k: $k_j = x'_{n-j+1}$. Подставим в (4):

$$\varphi_s(k) = \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{x'_{n-j+1} s_j} = \prod_{l=1}^{n} \omega_{p_{n-l+1}}^{x'_l s_{n-l+1}} = \prod_{t=1}^{n} \omega_{p'_t}^{x'_t z_t},$$

где обозначили $z_t = s_{n-t+1}$. Последнее равенство вытекает из взаимосвязи $p'_t = p_{n-t+1}$ элементов наборов P_n и P_n'.

Рассуждая относительно P_n' по формуле (3) имеем

$$\tau_z(k) = \psi_z(x) = \prod_{t=1}^{n} \omega_{p'_t}^{z_t x'_t},$$

где $z = \sum_{t=1}^{n} z_t m'_{n-1}$.

Доказали, что из равенства $\tau_z(k) = \varphi_s(k)$ вытекает $z_t = s_{n-t+1}$, то есть $z = \mathrm{rev}_{P_n}(s)$.

Обратное соотношение доказывается с помощью предложения 1. И здесь надо помнить, что дискретные функции Виленкина вида (4) и (5) определяются по разным (взаимно-противоположным) упорядоченным наборам P_n и P_n'. $\square$

6°. Отметим свойства дискретных функций Виленкина в основных нумерациях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Для функций вида* (4) *очевидно* $\varphi_s(k) = \varphi_k(s)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Для функций вида* (5) *в общем случае соотношение* $\tau_s(k) = \tau_k(s)$ *не верно.*

Справедливость утверждения 4 легко увидеть из приведенного ниже примера матрицы $F_2 \oslash F_3$.

Векторы одинаковой длины допускают покоординатное умножение (умножение по Адамару) $\bullet$. В качестве таких векторов рассмотрим векторы φ_s и τ_s, представляющие собой набор значений дискретных функций Виленкина вида (4) и (5). Для P_n-ичных кодов введем операцию $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю p_j на j-м разряде, через которую определяется операция $\dot{+}$ на элементах множества $\{0, 1, 2, \dots, m_n - 1\}$, зависящая от выбора P_n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для дискретных функций Виленкина любой из двух основных нумераций выполняется мультипликативность как по индексу*

$$\varphi_{s \dot{+} l} = \varphi_s \bullet \varphi_l, \quad \tau_{s \dot{+} l} = \tau_s \bullet \tau_l \ ,$$

так и по аргументу

$$\varphi_s(k \dot{+} l) = \varphi_s(k) \cdot \varphi_s(l), \quad \tau_s(k \dot{+} l) = \tau_s(k) \cdot \tau_s(l) \ ,$$

для всех $s \in 0 : m_n - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению (4) на каждом аргументе

$$\varphi_{s \dot{+} l}(k) = \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{k_j (s_j + l_j)} = \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{k_j s_j} \cdot \prod_{j=1}^{n} \omega_{p_j}^{k_j l_j} = \varphi_s(k) \cdot \varphi_l(k).$$

По утверждению 3 перепишем свойство $\varphi_s(k \dot{+} l) = \varphi_s(k) \cdot \varphi_s(l)$.

Из предложения 2 вытекает, что мультипликативность по аргументу верна и для функций τ_s. Мультипликативность по индексу, согласно (1) и (3), верна и для функций Виленкина $\psi_s(x)$: $\psi_{s \dot{+} l}(x) = \psi_s(x) \cdot \psi_l(x)$.

По определению (5) это свойство переносится на дискретные мультипликативные функции: $\tau_{s \dot{+} l} = \tau_s \bullet \tau_l$. □

ЛЕММА 1. *Обратная (то есть минус первая степень) любой дискретной функции Виленкина есть дискретная функция Виленкина того же класса.*

Доказательство см. в [2], где отмечены также свойства обратной операции к $\dot{+}$. В следующем пункте дано определение, из которого лемма 1 вытекает.

Из предложения 3 и леммы 1 следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Множество дискретных функций Виленкина, построенных по упорядоченному набору* P_n, *составляет группу характеров.*

7°. Напомним данное в книге [7] понятие *дискретной экспоненциальной функции* (ДЭФ)

$$r_p = (1\ \omega_p\ \omega_p^2 \ldots \omega_p^{p-1}), \quad \text{где} \quad \omega_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}, \tag{7}$$

которое теперь (в отличие от [1]) рассматриваем для разных p, а потому и разной длины. Векторы одинаковой длины допускают покоординатное умножение (умножение по Адамару) $\bullet$. Поэтому для функций (7) определены их степени (по Адамару), которые также назовем ДЭФ. В частности, $r_p^{\bullet 0} = (1\ 1 \ldots 1)$,

$$r_p^{\bullet 2} = (1\ \omega_p^2\ \omega_p^4 \ldots \omega_p^{2p-2}), \ldots, r_p^{\bullet p-1} = (1\ \omega_p^{(p-1)}\ \omega_p^{2(p-1)} \ldots \omega_p^{(p-1)^2}). \tag{8}$$

Среди дискретных функций Уолша и Крестенсона выделяли [1] класс векторов *фиксированного уровня* n (фиксация значения p подразумевалась). В случае дискретных функций Виленкина единый класс составляют функции вида (4) построенные по *заданному упорядоченному набору* P_n. Этот класс совпадает с функциями (5) *с противоположным упорядоченным набором* P'_n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Называем *дискретной функцией Виленкина класса* $P_n = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ кронекерово произведение дискретных экспоненциальных функций (7) или (8) вида

$$\Psi = r_{p_1}^{\bullet j_1} \otimes r_{p_2}^{\bullet j_2} \otimes \ldots \otimes r_{p_n}^{\bullet j_n}, \qquad \text{где } 0 \leqslant j_k < p_k. \tag{9}$$

Условие $0 \leqslant j_k < p_k$ несущественное, так как ДЭФ обладают свойством периодичности.

Существует два основных *лексикографических* способа нумерации функций (9): слева направо и справа налево.

Например, при нумерации слева направо начальные p_1 $(0 \leqslant j < p_1)$ функций имеют вид

$$r_{p_1}^{\bullet j} \otimes r_{p_2}^{\bullet 0} \otimes \ldots \otimes r_{p_n}^{\bullet 0} = r_{p_1}^{\bullet j} \otimes r_{m'_{n-1}}^{\bullet 0}.$$

По формулам (3) и (5) легко проверяется, что это и есть функция τ_j.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *В общем случае формулы* (9) *верно*

$$\tau_j = \Psi\ , \qquad \textit{если} \quad j = \sum_{k=1}^{n} j_k m_{k-1}.$$

Данное предложене есть аналог предлолжения 3 из [1].

При нумерации в (9) справа налево начальные p_n $(0 \leqslant j < p_n)$ функций имеют вид

$$r_{p_1}^{\bullet 0} \otimes r_{p_2}^{\bullet 0} \otimes \ldots \otimes r_{p_{n-1}}^{\bullet 0} \otimes r_{p_n}^{\bullet j} = r_{m_{n-1}}^{\bullet 0} \otimes r_{p_n}^{\bullet j} = \varphi_j.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *В общем случае формулы* (9) *верно*

$$\varphi_s = \Psi \ , \quad \textit{если } s = j_n + \sum_{k=1}^{n-1} j_{n-k}(p_n p_{n-1} \dots p_{n-k+1}) = \sum_{k=1}^{n} j_{n-k+1} m'_{k-1} = \mathrm{rev}_{P'_n}(j).$$

Выводится из предложения 4 с помощью предложения 2.

8°. Установим связь дискретных функций Виленкина с дискретными преобразованиями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Дискретным преобразованием Виленкина-Кронекера класса* $P_n = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ назовём преобразование с матрицей в виде кронекерова произведения матриц дискретного преобразования Фурье указанных в наборе P_n порядков

$$V = F_{p_1} \otimes F_{p_2} \otimes \dots \otimes F_{p_n}. \tag{10}$$

В книге [8] предлагается новый вариант (отличный от кронекерова) тензорного произведения матриц, который назовём *b-произведением* и будем обозначать значком $\oslash$. Продемонстрируем этот вид тензорного произведения на примере b-произведения матриц дискретного преобразования Фурье порядка 2 и 3 (здесь $q = e^{\frac{2\pi i}{3}}$):

$$F_2 \oslash F_3 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & q & q^2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & q & q^2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & q^2 & q\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & q^2 & q\end{pmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & q & q^2 & 1 & q & q^2 \\ 1 & q & q^2 & -1 & -q & -q^2 \\ 1 & q^2 & q & 1 & q^2 & q \\ 1 & q^2 & q & -1 & -q^2 & -q \end{bmatrix}.$$

В строках данной матрицы записаны те же дискретные функции Виленкина класса $P_2 = \{2, 3\}$, что и в строках матрицы $F_2 \otimes F_3$, но в другом порядке: τ_0, $\tau_1 = r_2 \otimes r_3^{\bullet 0} = \varphi_3$, $\tau_2 = r_2^{\bullet 0} \otimes r_3 = \varphi_1$, $\tau_3 = r_2 \otimes r_3 = \varphi_4$, $\tau_4 = r_2^{\bullet 0} \otimes r_3^{\bullet 2} = \varphi_2$, $\tau_5 = r_2 \otimes r_3^{\bullet 2} = \varphi_5$.

В столбцах данной матрицы записаны дискретные функции Виленкина другого класса $P'_2 = \{3, 2\}$.

Порядок дискретных функций Виленкина в матрице $F_2 \otimes F_3$ соответствует порядку (4). Поэтому функции, упорядоченные как φ_s, можно называть *дискретными функциями Виленкина-Кронекера* (добавляя указание нумерации).

Порядок дискретных функций Виленкина как в строках, так и в столбцах, матрицы $F_2 \oslash F_3$ соответствует порядку (5). В книге [5] матрица $F_2 \oslash F_3$ рассматривается (без упоминания нового варианта тензорного произведения) как частный случай матрицы *дискретного мультипликативного преобразования Фурье*; поэтому функции упорядоченные как τ_s назвали *дискретными мультипликативными функциями.* Но это те же самые дискретные функции Виленкина, но в другой нумерации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Дискретным мультипликативным преобразованием Фурье класса* $P_n = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ назовём преобразование с матрицей в виде b-произведения матриц дискретного преобразования Фурье указанных в наборе P_n порядков

$$M = F_{p_1} \oslash F_{p_2} \oslash \ldots \oslash F_{p_n}. \tag{11}$$

Предлагается сравнить формулы (10) и (11).

9°. В определении (9) (а также в определениях (4) и (5) для основных нумераций) дискретных функций Виленкина требование простоты образующих чисел p_j не обязательное. Это требование становится полезным при следующем определении линейных перестановок матриц дискретных мультипликативных преобразований Фурье.

Считаем, что все p_j простые, но не обязательно различные. Опишем построение *правильной* линейной перестановки матрицы дискретного мультипликативного преобразования Фурье.

У дискретной функции Виленкина вида (9) какие-то показатели степени у указанных в записи (9) ДЭФ могут быть нулевыми $r_{p_k}^{\bullet 0} = (1\ 1\ 1 \ldots 1)$. Набор соответствующих оснований p_k зафиксируем и назовем *незначимыми.* Остальные основания p_k назовем *значимыми.* Назовем *допустимой* дискретную функцию Виленкина, у которой все значимые основания p_k различны.

Например, в классе $P_5 = (2, 3, 5, 2, 2)$ функция $\Psi_1 = r_2^{\bullet 0} \otimes r_3^{\bullet 2} \otimes r_5^{\bullet 3} \otimes r_2 \otimes r_2^{\bullet 0}$ допустимая, а функция $\Psi_2 = r_2^{\bullet 0} \otimes r_3^{\bullet 2} \otimes r_5^{\bullet 3} \otimes r_2 \otimes r_2$ недопустимая. Функция Ψ_1 служит образующей группы порядка 30, так как в предложенном примере значимые основания 2, 3, 5.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Допустимая функция служит образующей конечной группы* (*относительно операции* $\bullet$) *дискретных функций Виленкина вида* (9) *с нулевыми показателями при выбранных незначимых основаниях. Порядок этой группы равен произведению значимых оснований.*

В основе доказательств лежит следующая очевидная лемма.

ЛЕММА 2. *Если матрицы u, v, w, t таких размеров, что допустимы указанные ниже умножения по Адамару, то*

$$(u \otimes v) \bullet (w \otimes t) = (u \bullet w) \otimes (v \bullet t).$$

Определим матрицу T линейной перестановки матрицы дискретного мультипликативного преобразования Фурье (11) заданием строк T_j формируемой матрицы. Полагаем $T_0 = r_{m_n}^{\bullet 0} = (1\ 1\ 1 \ldots 1)$.

В качестве образующей строки $T_1 = T_{m'_0}$ возьмём любую допустимую функцию вида (9). Обозначим p'_1 порядок группы с выбранной образующей. Все элементы этой группы, начиная с нейтрального элемента T_0, составляют начальные строки формируемой матрицы

$$T_{k_1} = T_1^{\bullet k_1}, \quad k_1 \in 0 : p'_1 - 1.$$

В качестве следующей образующей строки $T_{m'_1}$ возьмем любую допустимую функцию, не встречающуюся среди ранее построенных T_k с номерами $k < m'_1 = p'_1$. Определим $m'_2 = p'_2 \cdot m'_1$, где p'_2 равно произведению p_k с ненулевыми показателями степени j_k у выбранной допустимой функции.

Очередные $m'_2 - m'_1$ функций (строки) строятся как следующее произведение (по Адамару), где при $k_2 = 0$ учтены ранее построенные строки:

$$T_{k_2 m'_1 + k_1 m'_0} = T_{m'_0}^{\bullet k_1} \bullet T_{m'_1}^{\bullet k_2}, \quad k_2 \in 1 : p'_2 - 1. \tag{12}$$

И так далее, пока не будут построены все m_n дискретных функций Виленкина.

Отметим, что функции (5) построены через функции (4) по этой же схеме. И наоборот, функции (4) построены через функции (5) по схеме (12).

Возможен общий подход без требования простоты образующих чисел p_j. В этом случае изменяется определение допустимых функций, что алгебраическими методами легко осуществляется. При определении линейной перестановки приходится делать много оговорок.

Доклад подготовлен в рамках проекта ДРПННиТ № 1.1348.2011.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беспалов М. С. *Дискретные функции Крестенсона* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 31 марта 2012 г. (`http://dha.spb.ru/reps12.shtml#0331`)

2. Малозёмов В. Н., Просеков О. В., Сабаев А. Н. *Дискретные функции Виленкина-Крестенсона* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 16 января 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0116`)

3. Виленкин Н. Я. *Об одном классе полных ортогональных систем* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1947. Т. 11. С. 363–400.

4. Виленкин Н. Я. *Дополнения.* В книге Качмаж С., Штейнгауз Г. *Теория ортогональных рядов*. М.: Физматлит, 1958. С. 458–507.

5. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.* М.: Наука, 1987.

6. Schipp F., Wade W. R., Simon P., Pal J. *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*. Budapest: Acad. Kiado, 1990.

7. Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Советское радио, 1975.

8. Беспалов М. С. *Математические методы в информатике и вычислительной технике.* В 2-х ч. Ч. 2. *Введение в прикладной гармонический анализ.* Владимир: ВлГУ, 2007.