

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Котелина Надежда Олеговна

**СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛУДИЗАЙНЫ И КУБАТУРНЫЕ
ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО СФЕРЕ**

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2013

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Института точных наук и информационных технологий Сыктывкарского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор ПЕВНЫЙ Александр Борисович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор МАЛОЗЁМОВ Василий Николаевич
(Санкт-Петербургский государственный университет)
кандидат физико-математических наук,
профессор ИСАКОВ Валерьян Николаевич
(Коми государственный педагогический институт)

Ведущая организация: Санкт-Петербургский Академический
университет РАН

Защита состоится 16 мая 2013 г. в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___» _____ 2013 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук

Ю. В. Чурин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Понятие *сферического t -дизайна* было введено Ф. Дельсартом, Й. Гётальсом, Й. Зайделем в 1977 г. С тех пор Н. Н. Андреев, Б. Б. Венков, В. А. Юдин, Н. Слоан, Е. Боннай занимались проблемами существования, строения и нахождения дизайнов заданного порядка на сфере заданной размерности. Сферические дизайны — это особый класс сферических кодов, т. е. конечных множеств точек на сфере S^{n-1} . Мотивом для их изучения послужило приближённое вычисление интегралов по сфере S^{n-1} . Интеграл от алгебраического полинома степени не выше t по сфере может быть вычислен как среднее от значений полинома в точках дизайна порядка t .

Сферические дизайны обладают рядом экстремальных свойств. В частности, Б. Б. Венков доказал, что для сферических дизайнов порядка t сумма всевозможных скалярных произведений их элементов, возведённых в чётную степень t (*t -потенциал*), достигает минимума. Этот результат можно обобщить, если рассматривать симметричные сферические дизайны, брать из них половину векторов (*сферические полудизайны*), а затем сопоставлять элементам нового множества некоторые веса. Тогда t -потенциал с весами достигнет минимума на *взвешенных сферических полудизайнах*. В. А. Юдин доказал экстремальные свойства сферических дизайнов, использующие полиномы Генгенбауэра. Аналогичные экстремальные свойства могут быть доказаны и для полудизайнов. Элементы взвешенного полудизайна (со знаками $+$ и $-$) можно брать в качестве узлов кубатурной формулы для вычисления интегралов по сфере, а веса — в качестве её коэффициентов.

Теорией кубатурных формул занимались И. Радон, А. Строуд, Д. Максвелл, С. Л. Соболев, В. И. Крылов, И. П. Мысовских, В. И. Лебедев. При фиксированной степени точности d они стремились минимизировать количество узлов кубатурных формул. Оценки снизу для количества узлов кубатурных формул с заданной степенью точности d получали И. П. Мысовских и Ф. Дельсарт.

Английский математик Э. Варинг (1734 – 1798) поставил задачу о представлении формы $\|x\|^t = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{t/2}$ при чётной степени t в виде суммы линейных форм, возведённых в степень t . Различные представления полу-

чали в 19 веке Е. Лукас, Ж. Лиувиль, А. Гурвиц и другие математики. Результаты этих исследований систематизированы в мемуаре Б. Резника ¹.

В некоторых случаях с помощью представления для $\|x\|^t$ можно получать взвешенные сферические полудизайны порядка t и строить с их помощью кубатурные формулы со степенью точности $d = t + 1$ и с числом узлов, меньшим, чем в известных формулах.

Цель работы.

- 1. Введение понятия сферического полудизайна и детальное изучение свойств сферических полудизайнов.*
- 2. Введение понятий взвешенного сферического полудизайна и несферического полудизайна, изучение их свойств.*
- 3. Исследование связей между взвешенными сферическими полудизайнами и кубатурными формулами для вычисления интегралов по сфере.*

Методика исследования. В диссертационной работе использовались методы теории сферических дизайнов, теории фреймов, теории кубатурных формул.

Результаты, выносимые на защиту.

- 1. Введено понятие сферического t -полудизайна. Установлено, что минимум t -потенциала достигается на сферических t -полудизайнах и только на них.*
- 2. Установлен критерий сферических полудизайнов в терминах полиномов Гегенбауэра. Установлено, что минимум потенциалов В. А. Юдина достигается на сферических t -полудизайнах и только на них.*
- 3. Доказано необходимое и достаточное условие для сферического t -полудизайна в терминах кубатурных формул. Строится кубатурная формула, точная для полиномов степени не выше $t+1$, с узлами в точках $(t+1)$ -дизайна, порождённого сферическим t -полудизайном.*

¹Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Am. Math. Soc. 1992. Vol. 96. No. 463. P. 1–155.

4. *Неравенство для t -потенциала обобщается на случай произвольного вектора весов $W = (W_1, \dots, W_m)$: $\sum_{i=1}^m W_i = 1$. Введено понятие взвешенного сферического t -полудизайна. Установлено, что неравенство для t -потенциала с весами достигается на взвешенных сферических t -полудизайнах и только на них.*
5. *Введено понятие несферического полудизайна порядка t . Доказано, что обобщённое на случай произвольных векторов неравенство для t -потенциала достигается на несферических t -полудизайнах и только на них.*
6. *Получен критерий взвешенных сферических полудизайнов в терминах кубатурных формул. Строится кубатурная формула, точная для полиномов степени не выше $t + 1$, с узлами в точках $(t + 1)$ -дизайна, порождённого взвешенным сферическим t -полудизайном.*
7. *Построены некоторые кубатурные формулы для вычисления интегралов по сфере с числом узлов, меньшим, чем в известных формулах.*

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Разработана теория сферических полудизайнов, включающая в себя критерии сферического полудизайна, связанные с t -потенциалами и с потенциалами В. А. Юдина. Построены некоторые кубатурные формулы для вычисления интегралов по сфере.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах и конференции:

- семинар кафедры вычислительной математики математико-механического факультета СПбГУ;
- семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD) (<http://dha.spb.ru>);
- Международная научная конференция «Теория приближений» (Санкт-Петербург, 6–8 мая 2010 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано четыре работы [1–4], перечисленные в конце автореферата. Статьи [1–3] опубликованы в изданиях из перечня ВАК.

Работы [2–4] написаны в соавторстве. В статье [2] диссертантом проведено доказательство основной теоремы и найдены коэффициенты в кубатурной формуле со степенью точности 9. В статье [3] А. Б. Певному принадлежит идея ввести понятие полудизайна и постановка задачи об обобщении неравенства для t -потенциала для произвольных ненулевых векторов. Доказательство обобщённого неравенства для t -потенциала и условия достижения в нём равенства принадлежат диссертанту. В статье [4] А. Б. Певный предложил ввести понятие взвешенного сферического полудизайна и поставил задачу обобщить неравенство для t -потенциала на случай произвольных весов. Доказательство неравенства с весами и критерия равенства в нём осуществлены диссертантом. В тезисах доклада [5] на Международной конференции “Теория приближений” анонсируются некоторые результаты из [3].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, 2 глав, разбитых на 15 параграфов, списка литературы, включающего 54 наименования. Объём диссертации — 117 страниц.

Содержание работы

В первой главе диссертации рассматриваются сферические полудизайны и взвешенные сферические полудизайны. В первом параграфе изучаются свойства сферических полудизайнов. Понятие сферического полудизайна является новым и впервые появилось в работе Н. О. Котелиной, А. Б. Певного [3].

Пусть заданы натуральные числа $n \geq 2$, m , t , причём t чётное. Используем скалярное произведение $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ — единичная сфера в \mathbb{R}^n .

Возьмём систему векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$. В диссертации рассматривается тождество, которое именуется *тождеством Варинга*, в честь английского математика Э. Варинга, поставившего задачу о представлении формы $(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{t/2}$ в виде суммы степеней порядка t линейных форм $\langle \varphi_i, x \rangle$:

$$\sum_{i=1}^m [\langle \varphi_i, x \rangle]^t = A_t \|x\|^t, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, для которой существует константа $A_t > 0$ такая, что выполняется тождество (1), называется сферическим полудизайном порядка t .

В первом параграфе установлено следующее свойство сферических полудизайнов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Сферический t -полудизайн $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ является сферическим p -полудизайном для всех $p = 2, 4, \dots, t$, с константой $A_p = c_p t$, где

$$c_p = \frac{(p-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+p-2)}. \quad (2)$$

Далее получено ещё одно эквивалентное определение сферического полудизайна порядка t .

ТЕОРЕМА 1. Пусть задана система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$. Для того чтобы система Φ была сферическим полудизайном порядка t , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x) dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Q(\varphi_i)$$

для любого однородного полинома $Q(x)$ степени t от n переменных. Здесь σ_n — площадь сферы S^{n-1} .

С каждым сферическим t -полудизайном связана кубатурная формула, точная для всех полиномов степени не выше $t+1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть t — натуральное чётное число, система $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — сферический t -полудизайн. Положим $\varphi_{m+i} = -\varphi_i$, $i \in \{1 : m\}$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x) dS = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2m} Q(\varphi_i) \quad (3)$$

для любого полинома $Q(x)$ степени не выше $t+1$.

Во втором параграфе рассматриваются сферические полудизайны порядка 2. В этом случае сферические полудизайны представляют собой жёсткие

фреймы. Рассматриваются вещественные гармонические фреймы и доказывается, что они являются сферическими 2-полудизайнами в \mathbb{R}^n .

В третьем параграфе вводятся сферические дизайны.

Пусть t целое, $t \geq 2$. Приведём определение сферического дизайна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ — сферический дизайн порядка t , если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и всех $p = 0, 1, \dots, t$ выполняется равенство

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [\langle \varphi_i, x \rangle]^p = \begin{cases} c_p \|x\|^p, & p \text{ чётное,} \\ 0, & p \text{ нечётное,} \end{cases}$$

где c_p определяются по формуле (2) при чётных $p \geq 2$, а $c_0 = 1$.

В третьем параграфе вводится также понятие симметричного сферического дизайна. Для чётных t устанавливается связь между определениями симметричного сферического $(t+1)$ -дизайна и сферического t -полудизайна.

Существует также определение сферического t -дизайна через кубатурные формулы, точные для всех полиномов $Q(x)$ степени не выше t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t -дизайном, если выполнено тождество

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x) dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Q(\varphi_i) \quad (4)$$

для всех полиномов $Q(x)$ степени не выше t . Здесь σ_n — это площадь сферы S^{n-1} .

Известно, что определения 2 и 3 эквивалентны.

Введём понятие t -потенциала для системы векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$:

$$P_t(\Phi) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]^t, \quad (5)$$

где t — натуральное чётное число. Для $t = 2$ потенциал называется *фреймовым потенциалом*.

В четвёртом параграфе приводится неравенство В. М. Сидельникова — Б. Б. Венкова для t -потенциала. Для любой системы $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$

выполняется неравенство

$$P_t(\Phi) \geq c_t m^2, \quad (6)$$

где константа c_t определена формулой (2) при $p = t$.

Справедливо следующее экстремальное свойство сферических t -полудизайнов.

ТЕОРЕМА 2. *Неравенство (6) обращается в равенство на сферических t -полудизайнах и только на них.*

Теорема 2 является следствием более общей теоремы, установленной далее в диссертации.

В пятом параграфе «Вершины икосаэдра» доказывается, что вершины икосаэдра образуют сферический 5-дизайн. В этом параграфе для системы Φ_{12} из всех 12 вершин икосаэдра, вписанного в сферу S^2 , вычисляется матрица Грама G . Вид матрицы G позволяет доказать свойство вершин икосаэдра:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad i \neq j, \quad |i - j| \neq 6, \quad i, j \in 1 : 12.$$

Далее это свойство используется при вычислении 4-потенциала системы Φ_6 из половины вершин икосаэдра, с помощью которого доказано указанное свойство икосаэдра.

В шестом параграфе «Вершины додекаэдра» рассматривается додекаэдр, двойственный к икосаэдру из предыдущего параграфа, вписанный в сферу S^2 . Его вершинами являются центры граней икосаэдра, спроектированные на сферу. Вычисляются координаты всех вершин додекаэдра, выписывается матрица Грама для соответствующей системы Ψ_{20} и устанавливается, что Ψ_{20} является сферическим дизайном порядка 5.

Существует ещё одно экстремальное свойство сферических t -полудизайнов, в формулировке которого используются полиномы Гегенбауэра $G_k(u)$. В седьмом параграфе в качестве подготовительного шага доказываются формула сложения и неотрицательная определённость для полиномов Гегенбауэра.

В восьмом параграфе доказывается критерий для сферических полудизайнов в терминах полиномов Гегенбауэра.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть t — натуральное чётное число. Для того, чтобы*

система $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ была сферическим t -полудизайном, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{i=1}^m G_k(\langle \varphi_i, x \rangle) = 0, \quad x \in S^{n-1}, \quad k = 2, 4, \dots, t. \quad (7)$$

Заметим, что в случае t -дизайна равенства (7) должны выполняться при всех $k = 1, 2, \dots, t$.

Далее для системы векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ на сфере S^{n-1} определяем потенциалы В. А. Юдина

$$U_k(\Phi) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m G_k(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle), \quad k = 1, 2, \dots, t.$$

Поводом для введения названия «потенциал» послужила неотрицательность выражений $U_k(\Phi)$, которая следует из формулы сложения для полиномов Гегенбауэра.

В восьмом параграфе доказывается критерий сферических полудизайнов в терминах потенциалов $U_k(\Phi)$:

ТЕОРЕМА 4. Пусть t — натуральное чётное число. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ является сферическим t -полудизайном тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$U_k(\Phi) = 0, \quad k = 2, 4, \dots, t.$$

Достижение потенциалами $U_k(\Phi)$ минимума, равного нулю, на сферических t -полудизайнах и только на них в диссертации именуется *вторым экстремальным свойством t -полудизайнов*.

В девятом параграфе неравенство Сидельникова – Венкова (6) обобщается на случай произвольных весов.

Пусть t — натуральное чётное число, система $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ лежит на сфере S^{n-1} . Рассматривается квадратная матрица A размера m с элементами

$$a_{ij} = [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]^t, \quad i, j \in 1 : m.$$

Эта матрица является неотрицательно определённой:

$$\langle AW, W \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } W \in \mathbb{R}^m.$$

Неравенство Сидельникова – Венкова может быть переписано так:

$$\langle AW_0, W_0 \rangle \geq c_t, \quad W_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^m.$$

В диссертации устанавливается более общее неравенство.

ТЕОРЕМА 5. Пусть t – натуральное чётное число, задана система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ на сфере S^{n-1} и вектор $W \in \mathbb{R}^m$ такой, что $\sum_{i=1}^m W_i = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\langle AW, W \rangle \geq c_t. \quad (8)$$

Далее доказывается необходимое и достаточное условие равенства в неравенстве (8).

ТЕОРЕМА 6. Для того, чтобы в (8) имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{i=1}^m W_i [\langle \varphi_i, x \rangle]^t = c_t \|x\|^t, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

Замечание. По аналогии с тождеством (1) тождество (9) названо *тождеством Варинга с весами*.

Условие (9) стало основой для введения понятия взвешенного сферического полудизайна, которое является новым и появилось впервые в работе Н. О. Котелиной, А. Б. Певного [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть вектор $W = (W_1, \dots, W_m) \in \mathbb{R}^m$ такой, что $\sum_{i=1}^m W_i = 1$. Система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется *взвешенным сферическим полудизайном порядка t с вектором весов W* , если выполнено тождество (9).

Таким образом, неравенство (8) обращается в равенство на взвешенных сферических полудизайнах порядка t и только на них.

Для краткости введём обозначение (Φ, W) для взвешенного сферического полудизайна Φ с вектором весов W .

Взвешенные сферические t -полудизайны обладают следующим свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть пара (Φ, W) , где $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, — взвешенный сферический полудизайн порядка t . Тогда пара (Φ, W) является взвешенным сферическим полудизайном порядка p для любого $p = 2, 4, \dots, t - 2$.

В девятом параграфе вводится также определение взвешенного сферического дизайна порядка t через систему тождеств и для чётных t устанавливается связь между определениями взвешенного симметричного сферического $(t + 1)$ -дизайна и взвешенного сферического t -полудизайна. Приводится пример, связанный с минимальными векторами решётки Коркина-Золотарёва E_8 . Для таких векторов доказывается тождество Варинга с весами и устанавливается, что эти векторы образуют в пространстве \mathbb{R}^8 взвешенный сферический дизайн порядка 7 с весами $W_i = \frac{1}{240}$.

В десятом параграфе рассматриваются t -полудизайны в \mathbb{R}^n , состоящие из векторов разной длины. Это понятие впервые появилось в работе Н. О. Котелиной, А. Б. Певного [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть t — натуральное чётное число. Система ненулевых векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset \mathbb{R}^n$, для которой существует константа $A_t > 0$ такая, что выполняется тождество (1), называется несферическим полудизайном порядка t .

В десятом параграфе неравенство Сидельникова – Венкова обобщается на случай ненулевых векторов из \mathbb{R}^n .

ТЕОРЕМА 7. Для любой системы ненулевых векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ в пространстве \mathbb{R}^n справедливо неравенство

$$P_t(\Phi) \geq c_t \left(\sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|^t \right)^2, \quad (10)$$

где константа c_t определяется формулой (2) при $p = t$. Равенство в (10) достигается на t -полудизайнах и только на них.

При $t = 2$ неравенство (10) доказал Р. Casazza.

Вторую главу открывает одиннадцатый параграф, в котором устанавливается критерий взвешенных сферических полудизайнов в терминах кубатурных формул.

ТЕОРЕМА 8. Пусть задана система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ на сфере S^{n-1} и вектор $W = (W_1, \dots, W_m) \in \mathbb{R}^m$ такой, что $\sum_{i=1}^m W_i = 1$. Для того чтобы пара (Φ, W) была взвешенным сферическим полудизайном порядка t , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x) dS = \sum_{i=1}^m W_i Q(\varphi_i) \quad (11)$$

для любого однородного полинома $Q(x)$ от n переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ степени t .

Равенство (11) выполняется также для любого однородного полинома $Q(x)$ степени $0, 2, \dots, t$. Чтобы оно выполнялось для полиномов нечётной степени, добавляем узлы $-\varphi_1, \dots, -\varphi_m$. Получаем кубатурную формулу

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x) dS \approx \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} W_i (Q(\varphi_i) + Q(-\varphi_i)), \quad (12)$$

точную для всех полиномов от n переменных степени не выше $t + 1$.

Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть пара (Φ, W) , где $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, является взвешенным сферическим t -полудизайном. Тогда кубатурная формула (12) является точной для любого полинома $Q(x)$ от n переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ степени не выше $t + 1$.

В параграфах с двенадцатого по пятнадцатый приводятся примеры построения взвешенных сферических полудизайнов порядка 4, 6, 8, 10, 12 и соответствующих кубатурных формул степени точности 5, 7, 9, 11, 13. Все кубатурные формулы строятся по приведённому выше методу. Например, в тринадцатом параграфе получены взвешенный сферический полудизайн порядка 6 и соответствующая кубатурная формула степени точности 7. При их построении используется тождество из книги Б. Резника:

$$540\|x\|^6 = 378x_1^6 + 378x_2^6 + 280x_3^6 + \sum_{i=1}^2 (\sqrt{3}x_i \pm 2x_3)^6 + \sum (\sqrt{3}x_1 \pm \sqrt{3}x_2 \pm x_3)^6, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (13)$$

В диссертации доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Система векторов

$$\Phi = \left\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}, 0, \pm 2), \frac{1}{\sqrt{7}}(0, \sqrt{3}, \pm 2), \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, \pm 1) \right\} \quad (14)$$

образует взвешенный сферический 6-полудизайн в пространстве \mathbb{R}^3 .

Для системы Φ устанавливается тождество Варинга при $t = 6$ с вектором весов $W \in \mathbb{R}^{11}$: $W = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{27}, \frac{49}{540}, \dots, \frac{49}{540} \right)$. Следовательно, пара (Φ, W) является взвешенным сферическим 6-полудизайном и можно написать следующую кубатурную формулу со степенью точности 7:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} Q(x) dS \approx \sum_{i=1}^{11} \frac{W_i}{2} (Q(\varphi_i) + Q(-\varphi_i)). \quad (15)$$

Число узлов в данной формуле равно 22.

С помощью взвешенных сферических полудизайнов были получены некоторые новые кубатурные формулы для вычисления интегралов по сфере с меньшим количеством узлов, чем в книге И. П. Мысовских²:

1. Для $n = 3$ построена кубатурная формула степени точности $d = 7$ со следующими узлами и коэффициентами

$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$	$\frac{1}{20}$;
$(0, 0, \pm 1)$	$\frac{1}{27}$;
$\frac{1}{\sqrt{7}}(\pm\sqrt{3}, 0, \pm 2), \frac{1}{\sqrt{7}}(0, \pm\sqrt{3}, \pm 2)$	$\frac{49}{1080}$;
$\frac{1}{\sqrt{7}}(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, \pm 1)$	$\frac{49}{1080}$.

Число узлов в этой формуле равно 22.

2. Для $n = 8$ построена кубатурная формула степени точности $d = 7$ со следующими узлами и коэффициентами

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1^2, 0^6); \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2}\right) \text{ с чётным числом плюсов } \frac{1}{240}.$$

Число узлов в этой формуле равно 240 и является минимальным.

²Мысовских И. П. *Интерполяционные кубатурные формулы*. М.: Наука, 1981. 336 с.

3. Для $n \geq 3$ построена кубатурная формула степени точности $d = 7$ со следующими узлами и коэффициентами

$$\begin{array}{ll} (\pm 1, 0^{n-1}) & \frac{8-n}{n^3+6n^2+8n}; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, \pm 1, 0^{n-2}) & \frac{4}{n^3+6n^2+8n}; \\ \frac{1}{\sqrt{n}}(\pm 1, \dots, \pm 1) & \frac{n^2}{2^n(n^2+6n+8)}. \end{array}$$

Число узлов в этой формуле равно $2n^2 + 2^n$ и при $n = 4, \dots, 8$ меньше, чем в известных формулах.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

- [1] Котелина Н. О. Обобщение неравенства Б. Б. Венкова и взвешенные сферические полудизайны // В мире научных открытий. 2012. № 8.1(32). С. 108–120.
- [2] Котелина Н. О., Певный А. Б. Взвешенные сферические полудизайны и кубатурные формулы для вычисления интегралов по сфере // Известия вузов. Математика. 2013. № 2. С. 49–55.
- [3] Котелина Н. О., Певный А. Б. Экстремальные свойства сферических полудизайнов // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. Вып. 5. С. 162–170. (English translation: St. Petersburg Math. J. 2011. Vol. 22. No. 5. P. 795-801.)

Другие публикации:

- [4] Котелина Н. О., Певный А. Б. Неравенство Венкова с весами и взвешенные сферические полудизайны // Проблемы математического анализа. 2011. Вып. 55. С. 29–36. (English translation: J. Math. Sci. 2011. Vol. 173. No. 6. P. 674–682.)
- [5] Котелина Н. О., Певный А. Б. Экстремальные свойства сферических полудизайнов // Тезисы докладов Международной конференции «Теория приближений». Санкт-Петербург, 6–8 мая 2010. С. 51–53.

- [6] Котелина Н. О. Оценка снизу количества элементов сферического дизайна с помощью линейного программирования // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD). Избранные доклады. 29 мая 2010 г. (<http://dha.spb.ru/rep10.shtml#0529>).
- [7] Котелина Н. О. Формула сложения для полиномов Гегенбауэра // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD). Избранные доклады. 13 ноября 2010 г. (<http://dha.spb.ru/rep10.shtml#1113>).