ПОВЕРХНОСТИ БЕЗЬЕ НА ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКЕ И ГЛАДКИЕ СОСТАВНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ*

М. И. Григорьев

m_grigoriev@list.ru

20 сентября 2008 г.

1°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^s$ задана матрица полюсов

$$\begin{matrix} \mathbf{a}_{00} & \mathbf{a}_{01} & \cdots & \mathbf{a}_{0n} \\ \mathbf{a}_{10} & \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m0} & \mathbf{a}_{m1} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{matrix} \tag{1}$$

По строкам этой матрицы построим $m+1$ кривую Безье n-й степени [1]

$$\mathbf{N}_i(v) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}_{ij}\, b_j^n(v), \quad v \in [0,1], \quad i \in 0:m,$$

где $b_j^n(v) = C_n^j\, v^j\,(1-v)^{n-j}$ — базисные полиномы Бернштейна степени n. Кривые $\mathbf{N}_i(v)$ будем называть *образующими*. Зафиксируем $v \in [0,1]$. По точкам $\mathbf{N}_0(v), \mathbf{N}_1(v), \ldots, \mathbf{N}_m(v)$ можно в свою очередь построить кривую Безье $\mathbf{B}(u,v)$, $u \in [0,1]$. Когда параметр v пробегает весь отрезок $[0,1]$, кривая $\mathbf{B}(u,v)$ описывает поверхность в пространстве $\mathbb{R}^s$, которая называется *поверхностью Безье степени $m \times n$, заданной на четырёхугольнике*. Её аналитическое представление имеет вид

$$\mathbf{B}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{N}_i(v)\, b_i^m(u) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}_{ij}\, b_i^m(u)\, b_j^n(v). \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Представим (2) в виде

$$\mathbf{B}(u,v) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \mathbf{a}_{ij}\, b_i^m(u)\, b_j^n(v) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{M}_j(u)\, b_j^n(v). \tag{3}$$

Таким образом, образующими для поверхности $\mathbf{B}(u,v)$ являются также кривые Безье m-й степени

$$\mathbf{M}_j(u) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{a}_{ij}\, b_i^m(u), \quad u \in [0,1], \quad j \in 0:n,$$

построенные по столбцам матрицы (1).

На рис. 1 приведены полюсы и образующие кривые для случая $m = 2$, $n = 3$. Построенная по ним поверхность Безье изображена на рис. 2.

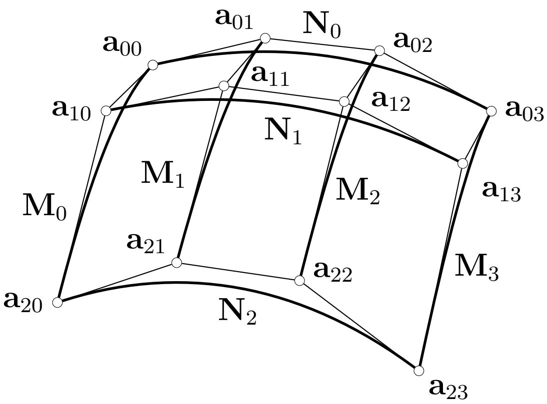

Рис. 1

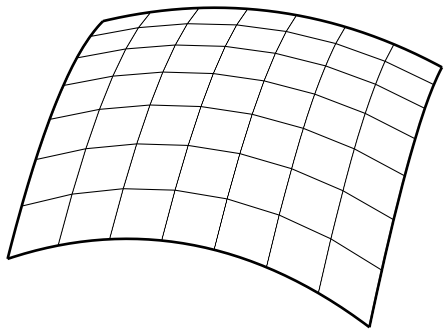

Рис. 2

Напомним некоторые свойства базисных полиномов Бернштейна (приведём их для полиномов n-й степени):

$$\begin{aligned} &b_j^n(0) = 0, \quad j \in 1:n; && b_0^n(0) = 1; \\ &b_j^n(1) = 0, \quad j \in 0:n-1; && b_n^n(1) = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (2) и (3) с учётом (4) следует, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}(0,v) = \mathbf{N}_0(v), && \mathbf{B}(1,v) = \mathbf{N}_m(v), && v \in [0,1]; \\ &\mathbf{B}(u,0) = \mathbf{M}_0(u), && \mathbf{B}(u,1) = \mathbf{M}_n(u), && u \in [0,1]. \end{aligned} \tag{5}$$

Далее

$$b_j^n(v) \geqslant 0 \text{ на } [0,1] \text{ при всех } j \in 0:n;$$

$$\sum_{j=0}^{n} b_j^n(v) \equiv 1.$$

Значит

$$b_i^m(u)\,b_j^n(v) \geqslant 0 \text{ на } [0,1]\times[0,1] \text{ при всех } i \in 0:m,\ j\in 0:n;$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} b_i^m(u)\,b_j^n(v) \equiv 1.$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{B}(u,v)$ при фиксированных $u \in [0,1]$ и $v\in[0,1]$ является выпуклой комбинацией полюсов $\mathbf{a}_{ij}$, $i \in 0:m$, $j\in 0:n$. С учётом (5) заключаем, что поверхность $\mathbf{B}(u,v)$ ограничена кривыми $\mathbf{M}_0(u)$, $\mathbf{M}_n(u)$, $\mathbf{N}_0(v)$, $\mathbf{N}_m(v)$ и не выходит за пределы выпуклой оболочки своих полюсов.

2°. Зафиксируем $u\in[0,1]$ и $v\in[0,1]$. Введём полюсы

$$\mathbf{a}_{ij}^{ks}(u,v),\quad i\in 0:m-k,\quad k\in 0:m,\quad j\in 0:n-s,\quad s\in 0:n, \tag{6}$$

с помощью рекуррентных соотношений

$$\mathbf{a}_{ij}^{ks} = (1-u)\,\mathbf{a}_{ij}^{k-1,s} + u\,\mathbf{a}_{i+1,j}^{k-1,s},\qquad i\in 0:m-k,\quad k\in 1:m; \tag{7}$$

$$\mathbf{a}_{ij}^{ks} = (1-v)\,\mathbf{a}_{ij}^{k,s-1} + v\,\mathbf{a}_{i,j+1}^{k,s-1},\qquad j\in 0:n-s,\quad s\in 1:n; \tag{8}$$

$$\mathbf{a}_{ij}^{00} = \mathbf{a}_{ij},\qquad i\in 0:m,\quad j\in 0:n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для полюсов* (6) *справедливо представление*

$$\mathbf{a}_{ij}^{ks}(u,v) = \sum_{\alpha=0}^{k}\sum_{\beta=0}^{s} \mathbf{a}_{i+\alpha,j+\beta}\,b_\alpha^k(u)\,b_\beta^s(v). \tag{9}$$

Доказательство. Базисные полиномы $b_\alpha^k(u)$, $\alpha\in 0:k$, $k\in 0:m$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям [1]

$$b_\alpha^k(u) = (1-u)\,b_\alpha^{k-1}(u) + u\,b_{\alpha-1}^{k-1}(u),\qquad \alpha\in 1:k-1;\quad k\in 2:m;$$

$$b_0^k(u) = (1-u)\,b_0^{k-1}(u),\qquad b_k^k(u) = u\,b_{k-1}^{k-1}(u),\qquad k\in 1:m;$$

$$b_0^0(u)\equiv 1.$$

С учётом (7) имеем

$$\sum_{\alpha=0}^{k}\sum_{\beta=0}^{s}\mathbf{a}_{i+\alpha,j+\beta}\,b_\alpha^k(u)\,b_\beta^s(v) = \sum_{\beta=0}^{s}\Big(\mathbf{a}_{i,j+\beta}^{00}\,b_0^k(u) + \mathbf{a}_{i+k,j+\beta}^{00}\,b_k^k(u) +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{k-1}\mathbf{a}_{i+\alpha,j+\beta}^{00}\left[(1-u)\,b_\alpha^{k-1}(u) + u\,b_{\alpha-1}^{k-1}(u)\right]\Big)\,b_\beta^s(v) =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{s} \Big(\sum_{\alpha=0}^{k-1} \mathbf{a}^{00}_{i+\alpha,j+\beta}\,(1-u)\, b^{k-1}_{\alpha}(u) + \sum_{\alpha=1}^{k} \mathbf{a}^{00}_{i+\alpha,j+\beta}\, u\, b^{k-1}_{\alpha-1}(u) \Big)\, b^{s}_{\beta}(v) =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{s} \Big(\sum_{\alpha=0}^{k-1} \big[(1-u)\, \mathbf{a}^{00}_{i+\alpha,j+\beta} + u\, \mathbf{a}^{00}_{i+\alpha+1,j+\beta} \big]\, b^{k-1}_{\alpha}(u) \Big)\, b^{s}_{\beta}(v) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{s} \mathbf{a}^{10}_{i+\alpha,j+\beta}\, b^{k-1}_{\alpha}(u)\, b^{s}_{\beta}(v).$$

Далее, используя рекуррентные соотношения для $b^{s}_{\beta}(v)$ и (8), уменьшим на единицу верхний предел суммирования во второй сумме

$$\sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{s} \mathbf{a}^{10}_{i+\alpha,j+\beta}\, b^{k-1}_{\alpha}(u)\, b^{s}_{\beta}(v) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{s-1} \mathbf{a}^{11}_{i+\alpha,j+\beta}\, b^{k-1}_{\alpha}(u)\, b^{s-1}_{\beta}(v).$$

Продолжая аналогично, получаем

$$\sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{s-1} \mathbf{a}^{11}_{i+\alpha,j+\beta}\, b^{k-1}_{\alpha}(u)\, b^{s-1}_{\beta}(v) = \sum_{\alpha=0}^{k-2} \sum_{\beta=0}^{s-1} \mathbf{a}^{21}_{i+\alpha,j+\beta}\, b^{k-2}_{\alpha}(u)\, b^{s-1}_{\beta}(v) =$$

$$= \cdots = \sum_{\alpha=0}^{1} \sum_{\beta=0}^{1} \mathbf{a}^{k-1,s-1}_{i+\alpha,j+\beta}\, b^{1}_{\alpha}(u)\, b^{1}_{\beta}(v) = \sum_{\beta=0}^{1} \mathbf{a}^{k,s-1}_{i,j+\beta}\, b^{1}_{\beta}(v) =$$

$$= (1-v)\, \mathbf{a}^{k,s-1}_{ij} + v\, \mathbf{a}^{k,s-1}_{i,j+1} = \mathbf{a}^{ks}_{ij}.$$

Предложение доказано. □

Формула (9) наиболее содержательна при $k = m$, $s = n$. В этом случае

$$\mathbf{a}^{mn}_{00}(u,v) = \sum_{\alpha=0}^{m} \sum_{\beta=0}^{n} \mathbf{a}_{\alpha\beta}\, b^{m}_{\alpha}(u)\, b^{n}_{\beta}(v) = \mathbf{B}(u,v).$$

Таким образом, значение полинома $\mathbf{B}(u,v)$ можно находить с помощью рекуррентных соотношений (7)–(8). Вычисление начинается с матрицы полюсов (1). На каждом шаге происходит пересчёт полюсов по формуле (7) или (8). Поскольку порядок использования соотношений (7) и (8) произволен, мы получаем пакет алгоритмов для вычисления значения полинома $\mathbf{B}(u,v)$.

Приведём конкретный пример алгоритма вычисления. Итак, начинаем вычисления с матрицы (1). Найдём сначала $m+1$ полюс $\mathbf{a}^{0n}_{i0}(v)$, $i \in 0 : m$, с помощью рекуррентного соотношения (8). Затем, применяя (7) к полученным полюсам, вычисляем значение $\mathbf{a}_{00}^{mn}(u,v) = \mathbf{B}(u,v)$. Геометрически это соответствует нахождению точек на образующих кривых $\mathbf{N}_i(v)$ по алгоритму Кастельжо, а затем вычислению по такому же алгоритму точки на кривой Безье $\mathbf{B}(u,v)$ с полюсами $\mathbf{N}_i(v)$, лежащей на поверхности (рис. 3).

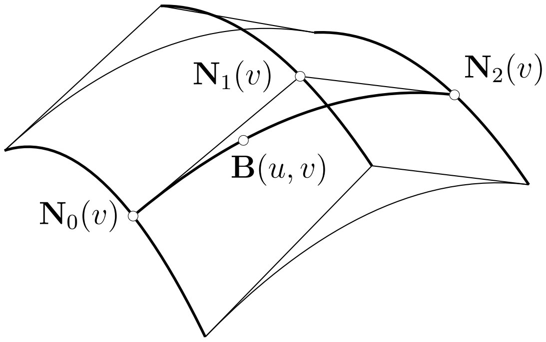

Рис. 3

Отметим, что при $n < m$ рассмотренный алгоритм является наиболее эффективным алгоритмом из всего пакета.

Рассмотрим ещё один вариант алгоритма. Пусть рекуррентные соотношения (7) и (8) применяются поочерёдно. При этом строится последовательность матриц полюсов $\{\mathbf{a}_{ij}^{00}\}$, $\{\mathbf{a}_{ij}^{10}\}$, $\{\mathbf{a}_{ij}^{11}\}$, $\{\mathbf{a}_{ij}^{21}\}$ и т. д. Данный алгоритм вычисления представляет собой так называемый *прямой алгоритм Кастельжо* для поверхностей Безье на четырёхугольнике [2]. На рис. 4 показаны этапы вычисления точки на поверхности таким способом при $m = n = 2$.

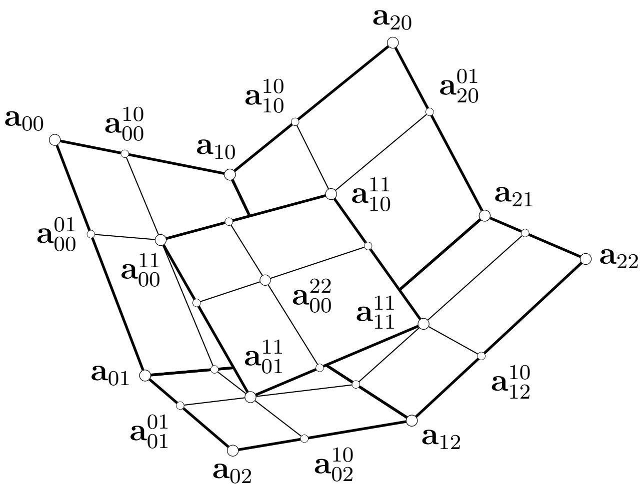

Рис. 4. Прямой алгоритм Кастельжо

3°. Расширим матрицу (1), добавив к ней полюсы $\mathbf{a}_{-i,j}$, $i \in 1:p$, $j \in 0:n$ (здесь p — фиксированное натуральное число). По столбцам $\{\mathbf{a}_{-i,j}\}$, $i \in 0:p$, $j \in 0:n$, построим $n+1$ кривых Безье степени p, заданных на отрезке $[-1,0]$:

$$\widetilde{\mathbf{M}}_j(u) = \sum_{i=0}^{p} \mathbf{a}_{i-p,j}\, b_i^p(u+1), \quad j \in 0:n, \quad u \in [-1,0].$$

По этим кривым построим поверхность Безье степени $p \times n$, заданную на квадрате $[-1,0] \times [0,1]$:

$$\mathbf{Q}(u,v) = \sum_{j=0}^{n} \widetilde{\mathbf{M}}_j(u)\, b_j^n(v), \quad u \in [-1,0], \quad v \in [0,1]. \tag{10}$$

Поверхности $\mathbf{Q}(u,v)$ и $\mathbf{B}(u,v)$ имеют общее ребро $\mathbf{Q}(0,v) = \mathbf{B}(0,v)$, $v \in [0,1]$.

Рассмотрим составную поверхность Безье

$$\mathbf{S}(u,v) = \begin{cases} \mathbf{Q}(u,v), & u \in [-1,0], \quad v \in [0,1]; \\ \mathbf{B}(u,v), & u \in [0,1], \quad v \in [0,1]. \end{cases}$$

Введём оператор взятия конечной разности на двухиндексном множестве элементов

$$\left(\Delta^\alpha \mathbf{a}_{*,j}\right)_i = \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-k}\, C_\alpha^k\, \mathbf{a}_{i+k,j}\,;$$

$$\left(\Delta^\beta \mathbf{a}_{i,*}\right)_j = \sum_{s=0}^{\beta} (-1)^{\beta-s}\, C_\beta^s\, \mathbf{a}_{i,j+s}\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для того, чтобы поверхность* $\mathbf{S}(u,v)$ *обладала гладкостью* r*-го порядка* ($r \leqslant \min\{m,p\}$) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$A_p^\alpha \left(\Delta^\alpha \mathbf{a}_{*,j}\right)_{-\alpha} = A_m^\alpha \left(\Delta^\alpha \mathbf{a}_{*,j}\right)_0, \qquad j \in 0:n, \quad \alpha \in 1:r, \tag{11}$$

где $A_p^\alpha = \frac{p!}{(p-\alpha)!}$, $A_m^\alpha = \frac{m!}{(m-\alpha)!}$.

Доказательство. Необходимость. Очевидно, что гладкость поверхности $\mathbf{S}(u,v)$ может нарушаться только вдоль ребра $\mathbf{S}(0,v)$, $v \in [0,1]$. Выпишем условия согласования гладкости полиномов $\mathbf{Q}(u,v)$ и $\mathbf{B}(u,v)$ на этом ребре:

$$\left.\frac{\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{Q}(u,v)}{\partial u^\alpha\, \partial v^\beta}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{B}(u,v)}{\partial u^\alpha\, \partial v^\beta}\right|_{u=0},$$

$$\alpha \in 0:r, \quad \beta \in 0:\min\{n,r\}, \quad \alpha+\beta \in 1:r.$$

Примем в последнем равенстве $\beta = 0$. С учётом (3) и (10) имеем

$$\sum_{j=0}^{n} \widetilde{\mathbf{M}}_j^{(\alpha)}(0)\, b_j^n(v) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{M}_j^{(\alpha)}(0)\, b_j^n(v), \quad \alpha \in 1:r, \quad v \in [0,1],$$

что равносильно

$$\widetilde{\mathbf{M}}_j^{(\alpha)}(0) = \mathbf{M}_j^{(\alpha)}(0), \quad j \in 0:n, \quad \alpha \in 1:r. \tag{12}$$

Для производной порядка α полинома в форме Бернштейна $\mathbf{M}_j(u)$ справедлива формула [1]

$$\mathbf{M}_j^{(\alpha)}(u) = A_m^{\alpha} \sum_{i=0}^{m-\alpha} \big(\Delta^{\alpha}\, \mathbf{a}_{*,j}\big)_i\, b_i^{m-\alpha}(u). \tag{13}$$

Для полиномов $\widetilde{\mathbf{M}}_j(u)$ формула (13) принимает вид

$$\widetilde{\mathbf{M}}_j^{(\alpha)}(u) = A_p^{\alpha} \sum_{i=0}^{p-\alpha} \big(\Delta^{\alpha}\, \mathbf{a}_{*,j}\big)_{i-p}\, b_i^{p-\alpha}(u+1). \tag{14}$$

Значит, с учётом (4), равенство (12) эквивалентно

$$A_p^{\alpha}\, \big(\Delta^{\alpha}\, \mathbf{a}_{*,j}\big)_{-\alpha} = A_m^{\alpha}\, \big(\Delta^{\alpha}\, \mathbf{a}_{*,j}\big)_0\,, \quad j \in 0:n, \quad \alpha \in 1:r.$$

Достаточность. Пусть выполнены условия (11). Покажем, что все частные производные полиномов $\mathbf{Q}(u,v)$ и $\mathbf{B}(u,v)$ до r-го порядка совпадают на их общем ребре. Зафиксируем два целых числа $\alpha \in 0:r$, $\beta \in 0:\min\{n,r\}$ таких, что $\alpha + \beta \in 1:r$. Имеем

$$\left.\frac{\partial^{\alpha+\beta}\, \mathbf{B}(u,v)}{\partial u^{\alpha}\, \partial v^{\beta}}\right|_{u=0} = \frac{\partial^{\beta}}{\partial v^{\beta}} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{M}_j^{(\alpha)}(0)\, b_j^n(v).$$

С учётом (11), (13) и (14) получим

$$\mathbf{M}_j^{(\alpha)}(0) = A_m^{\alpha}\, \big(\Delta^{\alpha}\, \mathbf{a}_{*,j}\big)_0 = A_p^{\alpha}\, \big(\Delta^{\alpha}\, \mathbf{a}_{*,j}\big)_{-\alpha} = \widetilde{\mathbf{M}}_j^{(\alpha)}(0).$$

Значит

$$\frac{\partial^{\beta}}{\partial v^{\beta}} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{M}_j^{(\alpha)}(0)\, b_j^n(v) = \frac{\partial^{\beta}}{\partial v^{\beta}} \sum_{j=0}^{n} \widetilde{\mathbf{M}}_j^{(\alpha)}(0)\, b_j^n(v) = \left.\frac{\partial^{\alpha+\beta}\, \mathbf{Q}(u,v)}{\partial u^{\alpha}\, \partial v^{\beta}}\right|_{u=0}.$$

Предложение доказано. □

Замечание. Условия (11) при каждом $j \in 0:n$ совпадают с условиями гладкой сшивки до r-го порядка образующих кривых $\mathbf{M}_j(u)$ и $\widetilde{\mathbf{M}}_j(u)$ в их общей точке $\mathbf{M}_j(0) = \widetilde{\mathbf{M}}_j(0)$.

На рис. 5 приведены две поверхности Безье, сшитые с сохранением гладкости 1-го порядка. Полюсы, отмеченные на рисунке, связаны условиями (11).

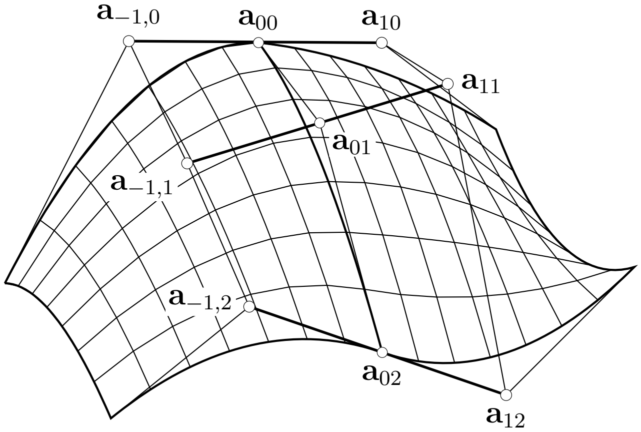

Рис. 5. Сшивка поверхностей Безье по общему ребру

4°. В предыдущем пункте мы получили условия гладкости поверхности, составленной из двух порций Безье на четырёхугольнике. Рассмотрим случай сшивки четырёх порций $\mathbf{B}_i(u,v)$, $i = 1,\dots,4$, предполагая, что они имеют общие ребра (рис. 6).

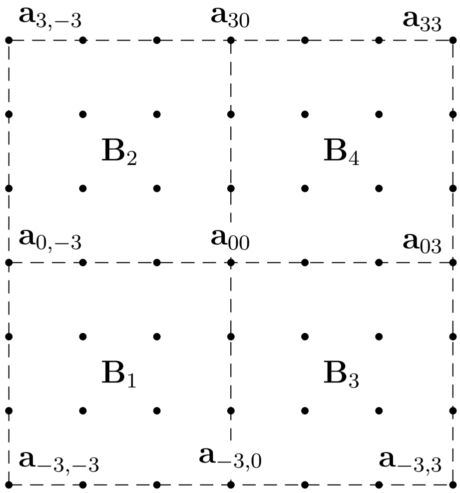

Рис. 6. Сшивка четырёх порций $\mathbf{B}_i(u,v)$, $i = 1,\dots,4$

Для простоты будем считать, что степени всех $\mathbf{B}_i(u,v)$ совпадают и равны $m\times n$. Пусть выбрано $r \in 1 : \min\{m,n\}$. Предположим, что полюсы порции $\mathbf{B}_1(u,v)$, $u \in [-1,0]$, $v \in [-1,0]$, зафиксированы и изменяться не могут. Для того, чтобы продолжить $\mathbf{B}_1$ на $[0,1]\times[-1,0]$ с сохранением гладкости r-го порядка, необходимо обеспечить выполнение условий

$$\left(\Delta^\alpha\,\mathbf{a}_{*,-j}\right)_0 = \left(\Delta^\alpha\,\mathbf{a}_{*,-j}\right)_{-\alpha}, \quad j \in 0:n, \quad \alpha \in 1:r.$$

В этом случае необходимо

$$\mathbf{a}_{i,-j} = \sum_{k=0}^{i} C_i^k \left(\Delta^k \mathbf{a}_{*,-j}\right)_0 = \sum_{k=0}^{i} C_i^k \left(\Delta^k \mathbf{a}_{*,-j}\right)_{-k}, \quad i \in 1:r, \quad j \in 0:n. \tag{15}$$

Остальные $(m-r)\times(n+1)$ полюсов порции $\mathbf{B}_2(u,v)$ выбираются произвольно.

Аналогично продолжая $\mathbf{B}_1(u,v)$ на $[-0,1]\times[0,1]$, получаем условия

$$\left(\Delta^\beta \mathbf{a}_{-i,*}\right)_0 = \left(\Delta^\beta \mathbf{a}_{-i,*}\right)_{-\beta}, \quad i \in 0:m, \quad \beta \in 1:r,$$

откуда

$$\mathbf{a}_{-i,j} = \sum_{s=0}^{j} C_j^s \left(\Delta^s \mathbf{a}_{-i,*}\right)_0 = \sum_{s=0}^{j} C_j^s \left(\Delta^s \mathbf{a}_{-i,*}\right)_{-s}, \quad j \in 1:r, \quad i \in 0:m. \tag{16}$$

Свободными остаются $(m+1)\times(n-r)$ полюсов $\mathbf{B}_3(u,v)$.

Теперь, если мы будем продолжать $\mathbf{B}_2(u,v)$ и $\mathbf{B}_3(u,v)$ на $[0,1]\times[0,1]$, то придём к следующим выражениям для определения полюсов порции $\mathbf{B}_4(u,v)$:

$$\mathbf{a}_{ij} = \sum_{k=0}^{i} C_i^k \left(\Delta^k \mathbf{a}_{*,j}\right)_0 = \sum_{k=0}^{i} C_i^k \left(\Delta^k \mathbf{a}_{*,j}\right)_{-k}, \quad i \in 1:r, \quad j \in 1:n; \tag{17}$$

$$\mathbf{a}_{ij} = \sum_{s=0}^{j} C_j^s \left(\Delta^s \mathbf{a}_{i,*}\right)_0 = \sum_{s=0}^{j} C_j^s \left(\Delta^s \mathbf{a}_{i,*}\right)_{-s}, \quad j \in 1:r, \quad i \in 1:m. \tag{18}$$

Оставшиеся $(m-r)\times(n-r)$ полюсов $B_4(u,v)$ произвольны.

Отметим, что полюсы $\mathbf{a}_{ij}$, $i,j \in 1:r$, определяются двумя способами. Покажем, что неоднозначности в данной ситуации не возникает. Обозначим полюсы, получаемые по формулам (17) и (18) соответственно $\mathbf{a}_{ij}^u$ и $\mathbf{a}_{ij}^v$.

ЛЕММА 1. *В случае выполнения условий* (15) *и* (16) *справедливо равенство*

$$\mathbf{a}_{ij}^u = \mathbf{a}_{ij}^v, \quad i \in 1:r, \quad j \in 1:r.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{a}_{ij}^u = \sum_{k=0}^{i} C_i^k \left(\Delta^k \mathbf{a}_{*,j}\right)_{-k} = \sum_{k=0}^{i} C_i^k \left(\Delta^k \sum_{s=0}^{j} C_j^s \left(\Delta^s \mathbf{a}_{*,*}\right)_{-s}\right)_{-k} =$$

$$= \sum_{s=0}^{j} C_j^s \left(\Delta^s \sum_{k=0}^{i} C_i^k \left(\Delta^k \mathbf{a}_{*,*}\right)_{-k}\right)_{-s} = \sum_{s=0}^{j} C_j^s \left(\Delta^s \mathbf{a}_{i,*}\right)_{-s} = \mathbf{a}_{ij}^v.$$

Лемма доказана. □

На рис. 7 приведена составная поверхность, сшитая из четырёх поверхностей Безье при $m=n=3$, $r=2$. В этом случае управления формой поверхности осуществляется при помощи 25 полюсов.

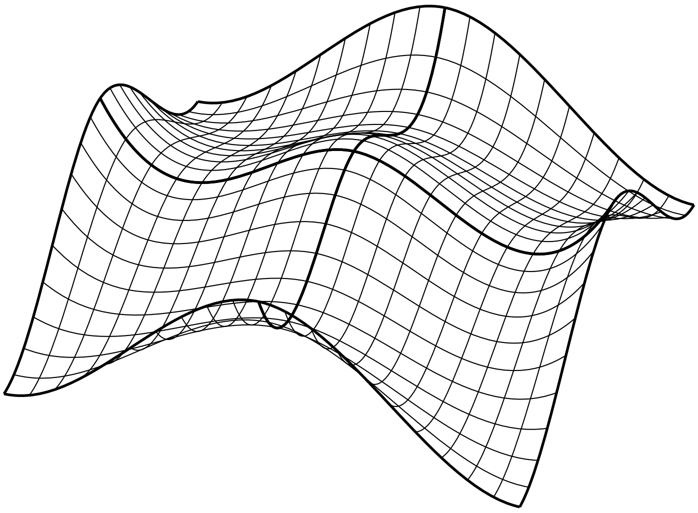

Рис. 7

5°. Приведём два примера C^1-гладких составных поверхностей Безье. На рис. 8 изображена поверхность, сшитая из 16 порций Безье. На рис. 9 рассмотрен случай нетривиального расположения сшиваемых порций.

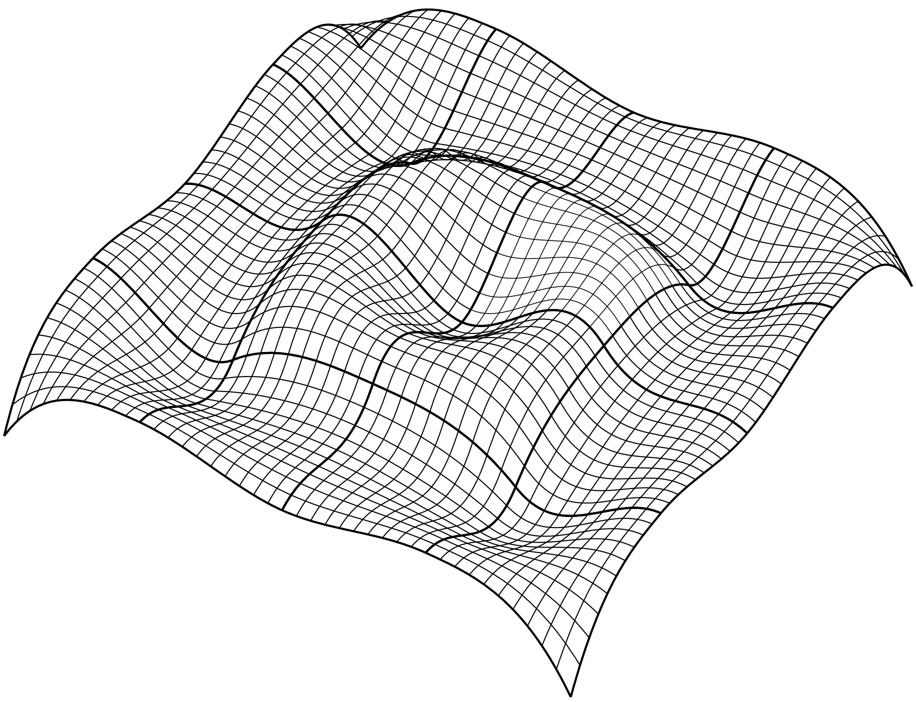

Рис. 8

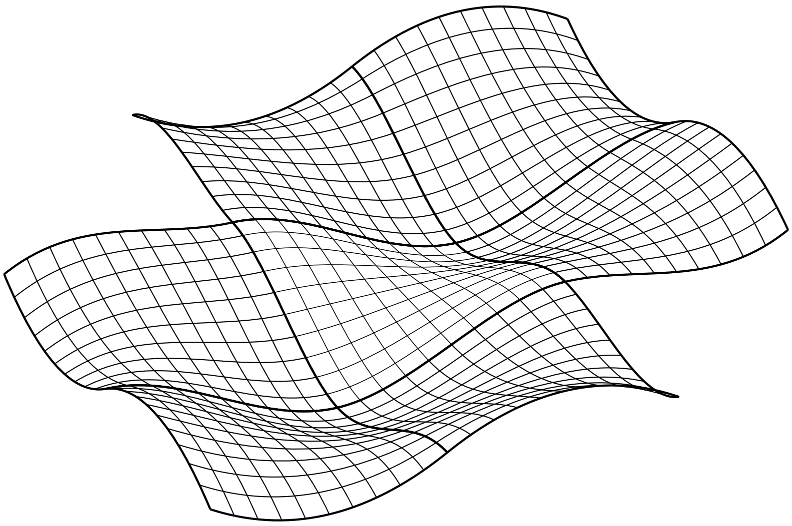

Рис. 9

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С. 1962–1971.

2. Farin G. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. San Diego: Academic Press, 2002. xvii + 499 pp.