

БИКУБИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

Н. В. Чашников
nik239@list.ru

23 января 2007 г.

1°. Пусть заданы непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0, 1]$ функции

$$\begin{aligned} f_1(v), f_2(v), f_3(v), f_4(v), \\ g_1(u), g_2(u), g_3(u), g_4(u). \end{aligned}$$

Обозначим $D = [0, 1]^2$. Ставится задача: *построить возможно более простую функцию $a : D \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую граничным условиям*

$$\begin{aligned} a(0, v) \equiv f_1(v), \quad a_u(0, v) \equiv f_2(v), \quad a_u(1, v) \equiv f_3(v), \quad a(1, v) \equiv f_4(v), \\ a(u, 0) \equiv g_1(u), \quad a_v(u, 0) \equiv g_2(u), \quad a_v(u, 1) \equiv g_3(u), \quad a(u, 1) \equiv g_4(u). \end{aligned} \quad (1)$$

Введём на $C^1[0, 1]$ линейные (однородные и аддитивные) функционалы

$$L_1(f) = f(0), \quad L_2(f) = f'(0), \quad L_3(f) = f'(1), \quad L_4(f) = f(1).$$

Функционалы L_i можно применять и к непрерывно дифференцируемым функциям двух переменных, заданным на D , если фиксировать один из аргументов. Пусть $a \in C^1(D)$. Тогда $a(\cdot, v)$ есть функция первого аргумента при фиксированном втором, $a(u, \cdot)$ — функция второго аргумента при фиксированном первом и

$$\begin{aligned} L_1(a(\cdot, v)) &= a(0, v), & L_1(a(u, \cdot)) &= a(u, 0), \\ L_2(a(\cdot, v)) &= a_u(0, v), & L_2(a(u, \cdot)) &= a_v(u, 0), \\ L_3(a(\cdot, v)) &= a_u(1, v), & L_3(a(u, \cdot)) &= a_v(u, 1), \\ L_4(a(\cdot, v)) &= a(1, v), & L_4(a(u, \cdot)) &= a(u, 1). \end{aligned}$$

С использованием функционалов L_i граничные условия (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} L_i(a(\cdot, v)) &= f_i(v), & v &\in [0, 1], \quad i \in 1 : 4; \\ L_j(a(u, \cdot)) &= g_j(u), & u &\in [0, 1], \quad j \in 1 : 4. \end{aligned} \quad (2)$$

* Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: <http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/>

2°. Граничные функции f_i, g_j должны удовлетворять естественным условиям согласования в вершинах квадрата D :

$$\begin{aligned} f_1(0) &= g_1(0), & f_1(1) &= g_4(0), & f_4(1) &= g_4(1), & f_4(0) &= g_1(1), \\ f'_1(0) &= g_2(0), & f'_1(1) &= g_3(0), & f'_4(1) &= g_3(1), & f'_4(0) &= g_2(1), \\ f_2(0) &= g'_1(0), & f_2(1) &= g'_4(0), & f_3(1) &= g'_4(1), & f_3(0) &= g'_1(1). \end{aligned}$$

Функция $a \in C^1(D)$, которую мы построим, будет иметь непрерывные на D смешанные производные a_{uv} и a_{vu} , которые, как известно, должны быть равны между собой [1, с. 456]. В частности, $a_{uv} = a_{vu}$ в вершинах квадрата D . Это приводит к дополнительным условиям согласования

$$f'_2(0) = g'_2(0), \quad f'_2(1) = g'_3(0), \quad f'_3(1) = g'_3(1), \quad f'_3(0) = g'_2(1).$$

Замечательно, что все 16 условий согласования можно записать единообразно:

$$L_i(f_j) = L_j(g_i), \quad i, j \in 1 : 4. \quad (3)$$

Формула (3) допускает матричное представление

$$\begin{bmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0) \\ f'_1(0) & f'_2(0) & f'_3(0) & f'_4(0) \\ f'_1(1) & f'_2(1) & f'_3(1) & f'_4(1) \\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) & f_4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(0) & g'_1(0) & g'_1(1) & g_1(1) \\ g_2(0) & g'_2(0) & g'_2(1) & g_2(1) \\ g_3(0) & g'_3(0) & g'_3(1) & g_3(1) \\ g_4(0) & g'_4(0) & g'_4(1) & g_4(1) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

3°. Введём кубические полиномы Эрмита H_1, H_2, H_3, H_4 , исходя из интерполяционных условий

$$\begin{aligned} H_1(0) &= 1, & H'_1(0) &= 0, & H'_1(1) &= 0, & H_1(1) &= 0; \\ H_2(0) &= 0, & H'_2(0) &= 1, & H'_2(1) &= 0, & H_2(1) &= 0; \\ H_3(0) &= 0, & H'_3(0) &= 0, & H'_3(1) &= 1, & H_3(1) &= 0; \\ H_4(0) &= 0, & H'_4(0) &= 0, & H'_4(1) &= 0, & H_4(1) &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1, \\ H_2(x) &= x^3 - 2x^2 + x, \\ H_3(x) &= x^3 - x^2, \\ H_4(x) &= -2x^3 + 3x^2. \end{aligned}$$

Графики этих полиномов представлены на рис. 1.

Отметим, что условия (5) можно записать в компактном виде

$$L_i(H_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in 1 : 4, \quad (6)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

В качестве H_j могут быть взяты любые другие непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (6).

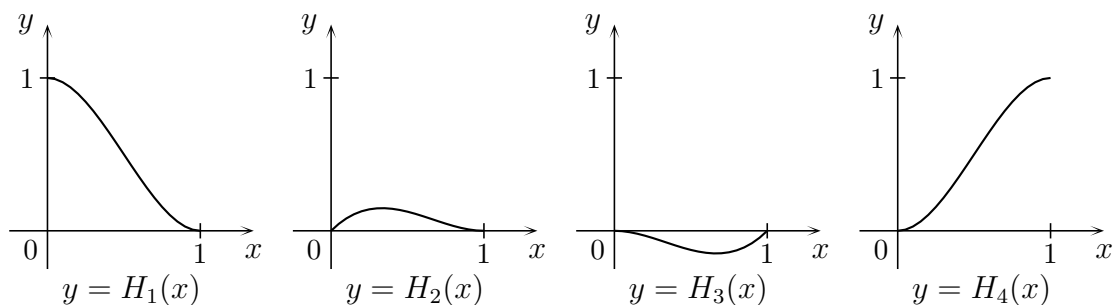


Рис. 1. Графики кубических полиномов Эрмита.

4°. Положим

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^4 f_i(v)H_i(u) + \sum_{j=1}^4 g_j(u)H_j(v) - \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 L_i(g_j)H_i(u)H_j(v). \quad (7)$$

Очевидно, что $a \in C^1(D)$ и существуют непрерывные на D смешанные производные a_{uv} и a_{vu} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При выполнении условий согласования (3) функция $a(u, v)$ вида (7) удовлетворяет граничным условиям (2).

Доказательство. Согласно линейности функционалов L_k и формуле (6) при $k \in 1 : 4$ имеем

$$\begin{aligned} L_k(a(\cdot, v)) &= \sum_{i=1}^4 f_i(v)L_k(H_i) + \sum_{j=1}^4 L_k(g_j)H_j(v) - \\ &- \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 L_i(g_j)H_j(v)L_k(H_i) = f_k(v). \end{aligned}$$

Аналогично с учётом (3) получаем

$$\begin{aligned} L_k(a(u, \cdot)) &= \sum_{i=1}^4 L_k(f_i)H_i(u) + \sum_{j=1}^4 g_j(u)L_k(H_j) - \\ &- \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 L_j(f_i)H_i(u)L_k(H_j) = g_k(u). \end{aligned}$$

Предложение доказано. □

График функции $a(u, v)$ вида (7) на множестве D называется *бикубической поверхностью Кунса*.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$f_1(v) \equiv 0, \quad f_4(v) \equiv 0, \quad g_1(u) \equiv 0, \quad g_4(u) \equiv 0.$$

Функции $f_2(v)$ и $f_3(v)$ будут многочленами, кратными $v(1-v)$, а функции $g_2(u)$ и $g_3(u)$ — многочленами, кратными $u(1-u)$. В этом случае 12 из 16 условий согласования (4), в которых участвуют внешние строки и столбцы матрицы, будут выполнены. Остаётся обеспечить равенства

$$f'_2(0) = g'_2(0), \quad f'_2(1) = g'_3(0), \quad f'_3(0) = g'_2(1), \quad f'_3(1) = g'_3(1). \quad (8)$$

Положим

$$\begin{aligned} f_2(v) &= av(1-v), & f_3(v) &= bv(1-v)(5v-1), \\ g_2(u) &= cu(1-u), & g_3(u) &= du(1-u)(5u-1). \end{aligned}$$

Условия (8) выполняются, если $a = b = c = d$. Возьмём в качестве общего значения этих коэффициентов число 10.

Теперь корректно определены все граничные функции. Соответствующая бикубическая поверхность Кунса представлена на рис. 2.

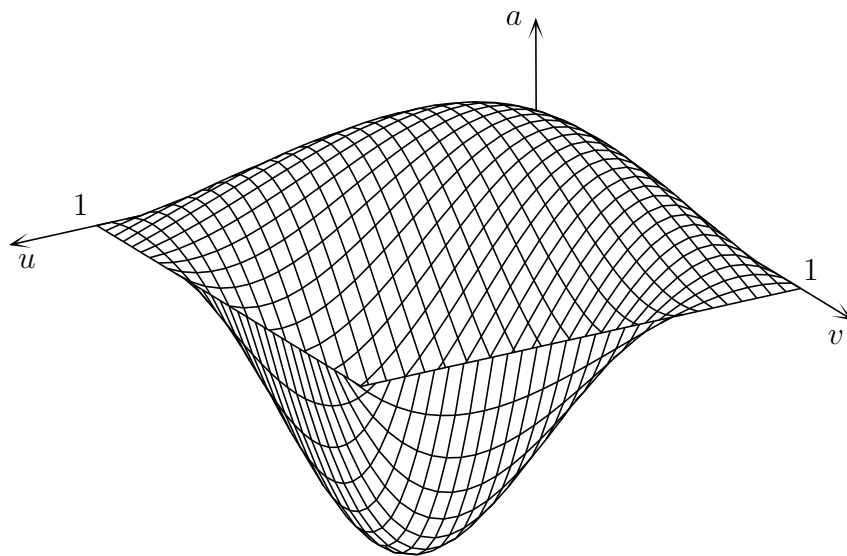


Рис. 2. Бикубическая поверхность Кунса.

5°. Перейдём к случаю, когда f_i и g_j в формуле (7) суть трёхмерные вектор-функции, заданные на отрезке $[0, 1]$, т. е.

$$f_i(v) = (f_{i1}(v), f_{i2}(v), f_{i3}(v)), \quad g_j(u) = (g_{j1}(u), g_{j2}(u), g_{j3}(u)), \quad i, j \in 1:4.$$

При этом $L_k(f_i) = (L_k(f_{i1}), L_k(f_{i2}), L_k(f_{i3}))$. Аналогично определяется $L_k(g_j)$. Поскольку

$$f_i(v)H_j(u) = (f_{i1}(v)H_j(u), f_{i2}(v)H_j(u), f_{i3}(v)H_j(u)),$$

то

$$L_k(f_i(v)H_j(\cdot)) = (f_{i1}(v)L_k(H_j), f_{i2}(v)L_k(H_j), f_{i3}(v)L_k(H_j)) = f_i(v)\delta_{kj}.$$

Пусть вектор-функции f_i и g_j непрерывно дифференцируемы на $[0, 1]$ и выполнены условия согласования

$$L_i(f_j) = L_j(g_i), \quad i, j \in 1 : 4.$$

Тогда отображение $a : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ вида (7) определяет *параметрическую поверхность Кунса*, удовлетворяющую граничным условиям (2).

ПРИМЕР 2. Возьмём в качестве H_j следующие функции:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \cos^2 \frac{\pi x}{2}, & H_2(x) &= \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \sin^2 \frac{\pi x}{2} \right), \\ H_3(x) &= -\frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{2} - \cos^2 \frac{\pi x}{2} \right), & H_4(x) &= \sin^2 \frac{\pi x}{2}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для таких H_j выполнены условия (6).

Построим с помощью параметрической поверхности Кунса поверхность тора. Она будет состоять из четырёх порций. Определим граничные вектор-функции для основной порции. Положим

$$\begin{aligned} f_1(v) &= (2 + \cos \pi v, 0, \sin \pi v), & f_4(v) &= (-2 - \cos \pi v, 0, \sin \pi v), \\ g_1(u) &= (3 \cos \pi u, 3 \sin \pi u, 0), & g_4(u) &= (\cos \pi u, \sin \pi u, 0). \end{aligned}$$

Функции $f_1(v)$ и $f_4(v)$ задают полуокружности радиуса 1, лежащие в плоскости XZ , с центрами $(2, 0, 0)$ и $(-2, 0, 0)$ соответственно. Функции $g_1(u)$ и $g_4(u)$ задают полуокружности с центром в начале координат и радиусами 3 и 1 соответственно, лежащие в плоскости XY (рис. 3).

Функции $g_2(u)$ и $g_3(u)$ определяют значения производной по v в точках поверхности с $v = 0$ и $v = 1$, т. е. на кривых, задаваемых функциями $g_1(u)$ и $g_4(u)$. Для построения поверхности тора необходимо, чтобы векторы $g_2(u)$ и $g_3(u)$ были параллельны оси OZ . Кроме того, для выполнения условий согласования требуется, чтобы

$$\begin{aligned} g_2(0) &= f_1'(0) = (0, 0, \pi), & g_2(1) &= f_4'(0) = (0, 0, \pi), \\ g_3(0) &= f_1'(1) = (0, 0, -\pi), & g_3(1) &= f_4'(1) = (0, 0, -\pi). \end{aligned}$$

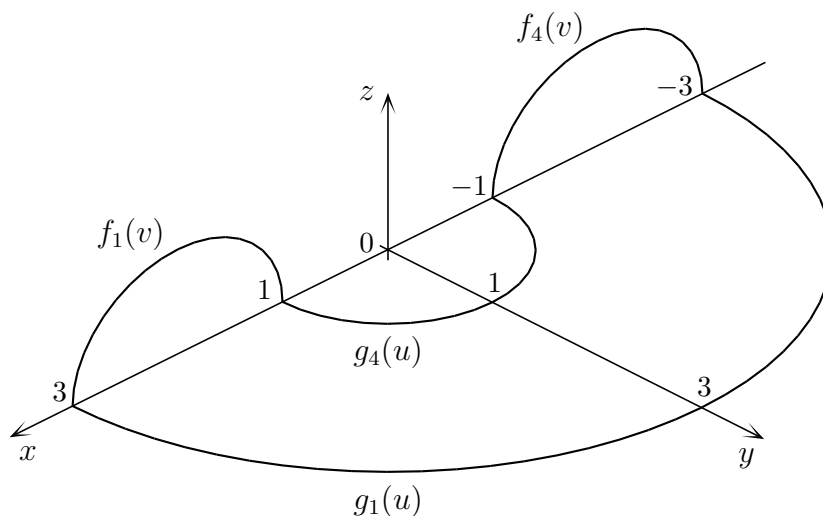


Рис. 3. Граничные функции.

Положим

$$g_2(u) = (0, 0, \pi), \quad g_3(u) = (0, 0, -\pi).$$

Аналогично функции $f_2(v)$ и $f_3(v)$ задают производные по u в точках поверхности, лежащих на кривых $f_1(v)$ и $f_4(v)$, поэтому для построения поверхности тора необходимо, чтобы векторы $f_2(v)$ и $f_3(v)$ были параллельны оси OY . Кроме того, для выполнения условий согласования требуется, чтобы

$$\begin{aligned} f_2(0) = g'_1(0) = (0, 3\pi, 0), \quad f'_2(0) = g'_2(0) = (0, 0, 0), \\ f'_2(1) = g'_3(0) = (0, 0, 0), \quad f_2(1) = g'_4(0) = (0, \pi, 0). \end{aligned}$$

Можно положить, например, $f_2(v) = (0, \pi(2 + \cos \pi v), 0)$. По аналогичным соображениям полагаем $f_3(v) = (0, -\pi(2 + \cos \pi v), 0)$.

Итак, граничные вектор-функции выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(v) = (2 + \cos \pi v, 0, \sin \pi v), \quad f_2(v) = (0, \pi(2 + \cos \pi v), 0), \\ f_3(v) = (0, -\pi(2 + \cos \pi v), 0), \quad f_4(v) = (-2 - \cos \pi v, 0, \sin \pi v), \\ g_1(u) = (3 \cos \pi u, 3 \sin \pi u, 0), \quad g_2(u) = (0, 0, \pi), \\ g_3(u) = (0, 0, -\pi), \quad g_4(u) = (\cos \pi u, \sin \pi u, 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Все 16 условий согласования выполнены. По формуле (7) для граничных функций (9) получим вектор-функцию $a(u, v) = (a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v))$. Параметрическая поверхность Кунса, определяемая этой вектор-функцией, изображена на рис. 4.

Докажем, что вектор-функция $a(u, v)$ при $u, v \in [0, 1]$ действительно описывает четверть поверхности тора.

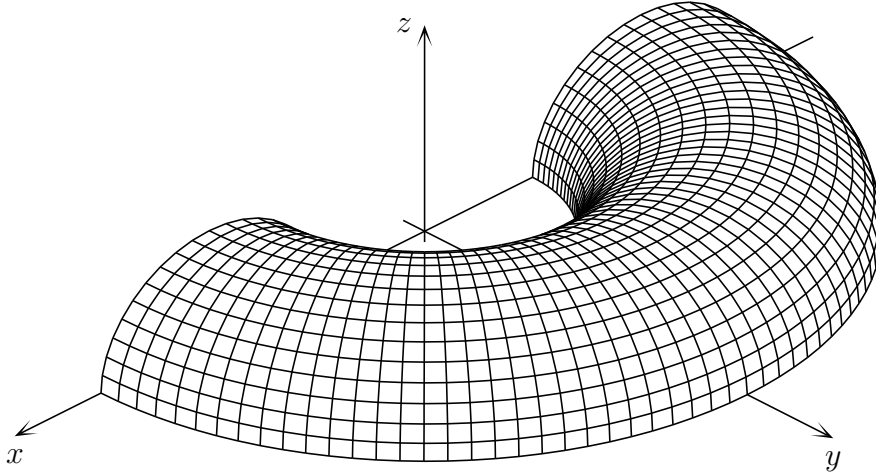


Рис. 4. Параметрическая поверхность Кунса.

Значения $L_i(g_j)$, используемые в формуле (7), образуют матрицу

$$\begin{bmatrix} g_1(0) & g_1'(0) & g_1'(1) & g_1(1) \\ g_2(0) & g_2'(0) & g_2'(1) & g_2(1) \\ g_3(0) & g_3'(0) & g_3'(1) & g_3(1) \\ g_4(0) & g_4'(0) & g_4'(1) & g_4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3, 0, 0) & (0, 3\pi, 0) & (0, -3\pi, 0) & (-3, 0, 0) \\ (0, 0, \pi) & (0, 0, 0) & (0, 0, 0) & (0, 0, \pi) \\ (0, 0, -\pi) & (0, 0, 0) & (0, 0, 0) & (0, 0, -\pi) \\ (1, 0, 0) & (0, \pi, 0) & (0, -\pi, 0) & (-1, 0, 0) \end{bmatrix}$$

(индекс j обозначает номер строки, а индекс i — номер столбца). Базисные функции H_1 и H_4 удовлетворяют соотношениям

$$H_1(u) - H_4(u) = \cos \pi u, \quad 3H_1(v) + H_4(v) = 2 + \cos \pi v, \quad H_1(u) + H_4(u) \equiv 1.$$

Приняв эти факты во внимание, запишем

$$\begin{aligned} a_1(u, v) &= (2 + \cos \pi v)(H_1(u) - H_4(u)) + \cos \pi u (3H_1(v) + H_4(v)) - \\ &\quad - 3(H_1(u) - H_4(u))H_1(v) - (H_1(u) - H_4(u))H_4(v) = \\ &= \cos \pi u (2 + \cos \pi v) + (H_1(u) - H_4(u)) \times \\ &\quad \times [2 + \cos \pi v - (3H_1(v) + H_4(v))] = \cos \pi u (2 + \cos \pi v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(u, v) &= \pi (2 + \cos \pi v)(H_2(u) - H_3(u)) + \sin \pi u (3H_1(v) + H_4(v)) - \\ &\quad - 3\pi (H_2(u) - H_3(u))H_1(v) - \pi (H_2(u) - H_3(u))H_4(v) = \\ &= \sin \pi u (2 + \cos \pi v) + \pi (H_2(u) - H_3(u)) \times \\ &\quad \times [2 + \cos \pi v - (3H_1(v) + H_4(v))] = \sin \pi u (2 + \cos \pi v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3(u, v) &= \sin \pi v (H_1(u) + H_4(u)) + \pi (H_2(v) - H_3(v)) - \\ &\quad - \pi (H_1(u) + H_4(u))H_2(v) + \pi (H_1(u) + H_4(u))H_3(v) = \\ &= \sin \pi v + \pi (H_2(v) - H_3(v)) [1 - (H_1(v) + H_4(v))] = \sin \pi v. \end{aligned}$$

Значит,

$$a(u, v) = ((2 + \cos \pi v) \cos \pi u, (2 + \cos \pi v) \sin \pi u, \sin \pi v).$$

Отсюда видно, что точка $a(u, v)$ получается из точки

$$(2 + \cos \pi v, 0, \sin \pi v) = f_1(v)$$

поворотом на угол πu вокруг оси OZ . Как следствие, поверхность, задаваемая вектор-функцией $a(u, v)$, получается вращением вокруг оси OZ полуокружности, определяемой вектор-функцией $f_1(v)$. Эта поверхность является четвертью поверхности тора (см. рис. 4). На рис. 5 из четырёх таких порций составлена полная поверхность тора.

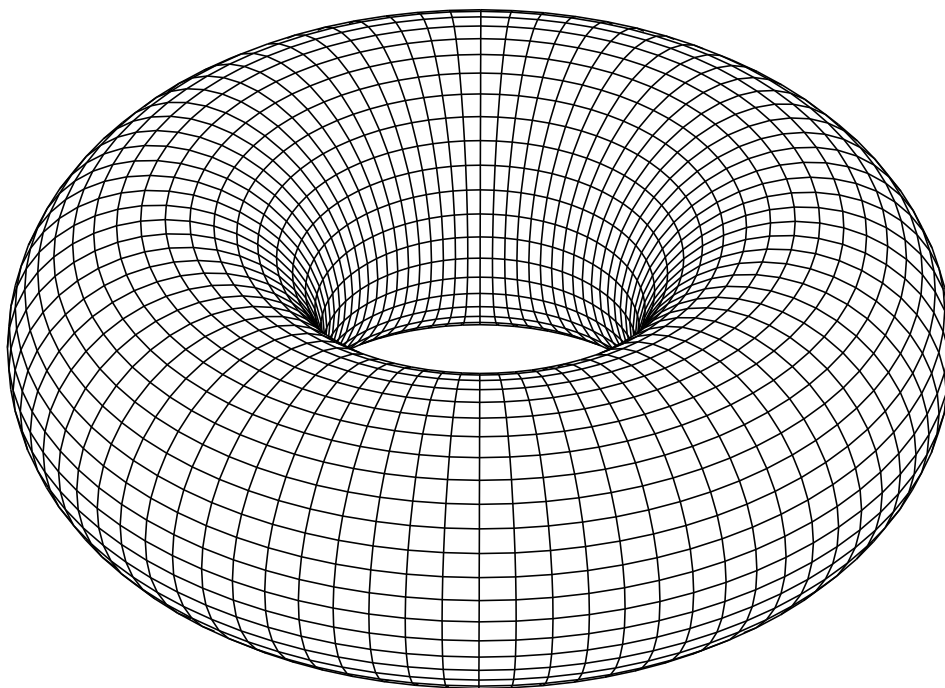


Рис. 5. Поверхность тора.

6°. Дальнейшую информацию о поверхностях Кунса можно найти в книге [2] и приведённом там списке литературы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Том 1. 8-е изд. М.: Физматлит, 2006.
2. G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. Academic Press, 2002.